Problemas sobre máximos y mínimos de las funciones (1)

1.ª SERIE

1.—*Por un punto dado P, ubicado dentro de un ángulo recto A B C, trazar la línea D Q de modo que forme el menor triángulo D B Q.*

Desde P trácese PR paralela a B C.

Hagamos B R$=a$, P R $=b$, B D$=x$

Luego D R$=x-a$, y, por los triángulos semejantes D B Q y D R P, tenemos:

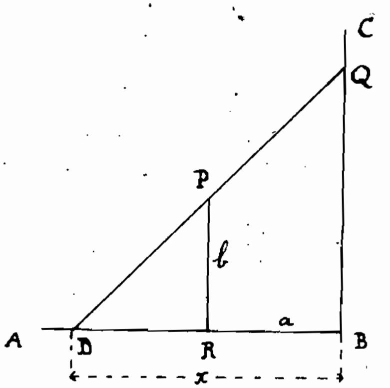
D R : R P :: B D : B Q

O bien

$x-a : b :: x :$ B Q

De donde

$$\text{B Q}=\frac{b\,x}{x-a}$$



(1) Para la solución de todos estos problemas nos hemos guiado por la excelente obrita de Thomas Tate intitulada: «*The Principles of the Differential and Integral Calculus*».

$$\text{Area } \Delta \text{ D B Q} = \tfrac{1}{2} \text{ B D} \times \text{B Q} = \frac{b\, x^2}{2\,(x-a)} = \text{un mínimo.}$$

Entonces, la función propuesta será:

$$y = \frac{x^2}{x-a} = \text{un mínimo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, se tiene:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2\,x\,(x-a) - x^2}{(x-a)^2} = o$$

Y, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $(x-a)^2$, nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x\,(x-a) - x^2 = o$$
$$\therefore \quad 2\,x^2 - 2\,x\,a - x^2 = o$$
$$\therefore \quad x^2 - 2\,x\,a = o$$

Dividiendo por x tenemos:

$$\therefore \quad x - 2\,a = o$$

De donde

$$x = 2\,a$$

De aquí se deduce que la línea D Q es bisecada en el punto P.

2.—*Una cisterna de base cuadrada, abierta en su parte superior, debe ser cubierta con una tapa de plomo de* a *pies de superficie; se pide las dimensiones de la cisterna cuando su contenido sea un máximo.*

Sea x el lado de la base, z la altura perpendicular de la cisterna; entonces la superficie en pies cuadrado de la cisterna es $= x^2 + 4\,x\,z = a$

$$\therefore\ z = \frac{a - x^2}{4\,x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

y el volumen de la cisterna = área de la base por la altura perpendicular, o sea $= x^2 \times z = x^2 \dfrac{(a - x^2)}{4\,x} = \dfrac{a\,x^2 - x^4}{4\,x} = \frac{1}{4}\ (a\,x - x^3)$ = un máximo.

Luego, la función propuesta será:

$$y = a\,x - x^3 = \text{un máximo.}$$

Diferenciando e igualando a cero, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = a - 3\,x^2 = o$$

$$\therefore\ x = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

Y, substituyendo en (1) este valor de x, tenemos:

$$Z = \frac{a - \dfrac{a}{3}}{4\sqrt{\dfrac{a}{3}}} = \frac{2\,a\sqrt{\dfrac{a}{3}}}{12\,\dfrac{a}{3}} = \frac{2\,a\sqrt{\dfrac{a}{3}}}{4\,a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Por consiguiente, la altura perpendicular de la cisterna debe ser igual a la mitad del lado de la base.

3.—*Circunscribir el menor triángulo isósceles alrededor de un círculo dado, cuyo radio $OP=OD=r$.*

Sea $x=$ C O; entonces C P $=\sqrt{x^2-r^2}$, y, por los triángulos semejantes C P O y C A D, tenemos:

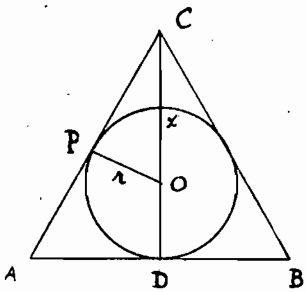
C P : O P :: D C : A D

O bien

$\sqrt{x^2-r^2} : r :: x+r :$ A D

De donde

$$AD=\frac{r\,(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}}$$



$\therefore$ Area Δ A B C $=$ A D $\times$ D C $=\dfrac{r\,(x+r)^2}{\sqrt{x^2-r^2}}=$ un mínimo.

Suprimiendo r y elevando al cuadrado numerador y denominador, la función propuesta será:

$$y=\frac{(x+r)^4}{x^2-r^2}=\frac{(x+r)^4}{(x+r)\,(x-r)}=\frac{(x+r)^3}{x-r}=\text{u mínimo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\,(x+r)^2\,(x-r)-(x+r)^3}{(x-r)^2}=0$$

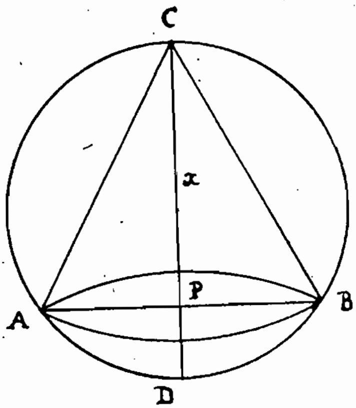
y, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $(x-r)^2$, nos queda

$$\therefore\ 3\,(x+r)^2\,(x-r)-(x+r)^3=0$$

y, dividiendo ambos miembros por $(x+r)^2$, tenemos:

$$\therefore\ 3\,(x-r)-(x+r)=0$$
$$\therefore\ 3\,x-3\,r-x-r=0$$
$$\therefore\ 2\,x-4\,r=0$$
$$\therefore\ x=2\,r,\ \text{y C D}=x+r=3\,r.$$

4.—*Determinar la altura del mayor cono A B C, que pueda extraerse de la esfera dada A D B C, cuyo diámetro CD=2 r.*



Sea $x=$ C P; entonces P D $=2\,r-x$
y $AP^2=CP\times PD=x(2\,r-x)$
$\therefore$ área base del cono $=\pi\times AP^2=\pi\,x\,(2\,r-x)$
$\therefore$ vol. del cono $=\frac{1}{3}$ área base $\times$ perpendicular
$\therefore$ vol. del cono $=\dfrac{\pi}{3}\,x^2\,(2\,r-x)=$ un máximo.

Entonces, la función propuesta será:

$y=\dfrac{\pi}{3}\,2\,x^2\,r-x^3=$ un máximo.

Diferenciando esta función, despreciando el coeficiente $\dfrac{\pi}{3}$ e igualando a cero, nos queda:

$$\frac{dy}{dx}=4\,x\,r-3\,x^2=0$$

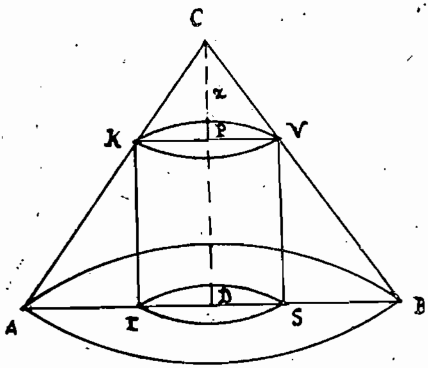
Dividiendo ambos miembros por x, tenemos:

$$\therefore 4r - 3x = 0$$

$$\therefore x = \frac{4}{3} r$$

Por consiguiente, la altura del mayor cono que pueda extraerse de la esfera dada A D B C es igual a los $\frac{4}{3}$ del radio de la esfera.

5.—*Determinar la altura del mayor cilindro I S K V que pueda extraerse del cono recto dado A B C.*



Sea A B$=a$, C D$=b$ y C P$=x$; entonces, por los triángulos semejantes C A B y C K V, tenemos:

$$CD : AB :: CP : KV$$

De donde

$$b : a :: x : KV$$

O bien

$$\text{K V} = \frac{a\,x}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ahora, el volumen del cilindro I S K V es igual a la superficie de la base por la altura.

$$\therefore \text{ Vol. cil. I S K V} = 0{,}7854 \text{ K V}^2 \times \text{I K}$$

Pero, según (1), $\text{K V} = \frac{a\,x}{b}$

Luego

$$\text{Vol. cit. I S K V} = \frac{0{,}7854\;a^2}{b^2} \times x^2\,(b - x) = \text{un máximo.}$$

Despreciando el factor constante, la función propuesta será:

$$y = x^2\,(b - x) = b\,x^2 - x^3 = \text{un máximo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,b\,x - 3\,x^2 = 0$$

$$\therefore 3\,x^2 = 2\,b\,x$$

$$\therefore x = \tfrac{2}{3}\,b$$

$$\text{Ahora I K} = \text{C D} - \text{C P}$$

$$\therefore \text{ I K} = b - \tfrac{2}{3}\,b = \tfrac{1}{3}\,b$$

Por consiguiente, la altura del mayor cilindro que pueda extraerse del cono dado A B C es igual a $\frac{1}{3}$ de la altura del cono.

6.—*Conocido el perímetro* p, *o suma de los lados, de un rectángulo; se pide el valor de los lados cuando la superficie del rectángulo sea máxima.*

Llamemos x la base; entonces la perpendicular será $=\frac{1}{2}\,p-x$

$\therefore$ Area rectángulo$=x\,(\frac{1}{2}\,p-x)=\frac{1}{2}\,p\,x-x^2=$un máximo.

Diferenciando e igualando a cero, tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\,p-2\,x=0$$

$$\therefore\ 2\,x=\frac{1}{2}\,p$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{4}\,p$$

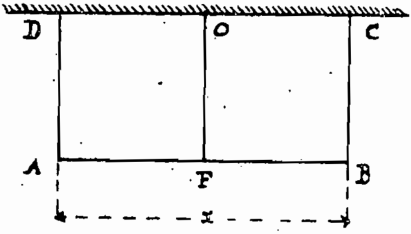
Por consiguiente, se deduce de esta expresión que el mayor rectángulo es un cuadrado.

7.—*Se desea construir un redil rectangular A B C D, apoyado contra una vieja muralla D C, de modo que encierre cierta superficie dada, digamos, de* a *piés cuadrados. Se necesita saber cuáles serán sus dimensiones, de modo que se construya con el menor gasto posible.*

Aquí el gasto será un mínimo cuando la longitud de la muralla C B A D sea también un mínimo.

Hagamos $x = AB$; entonces $AB \times AD = a$

$$\therefore \; AD = \frac{a}{x}$$



$\therefore$ la longitud de la muralla $= AB + 2AD$
$= x + \dfrac{2a}{x} =$ un mínimo

Luego, la función propuesta será:

$$y = x + \frac{2a}{x} = \text{un mínimo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{2a}{x^2} = 0$$

$$\therefore \; \frac{x^2 - 2a}{x^2} = 0$$

y multiplicando por x^2 los dos miembros de esta igualdad, se tiene:

$$x^2 - 2a = 0$$

$$\therefore \; x = \sqrt{2a}$$

$$\text{Pero } AD = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{2a}} = \frac{a\sqrt{2a}}{2a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a}$$

Por consiguiente, se deduce de esta expresión que la anchura del redil debe ser igual a la mitad de su largor.

8.—*Se pide lo mismo que en el último ejemplo, cuando el espacio encerrado por el redil esté dividido en dos compartimentos, por una muralla F O.*

Adoptando la misma notación que en el ejemplo último, tenemos:

$$\therefore \text{ longitud de la muralla} = \text{A B} + 3 \text{ A D} = x + \frac{3\,a}{x}$$

Luego, la función propuesta será:

$$y = x + \frac{3\,a}{x} = \text{un mínimo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{3\,a}{x^2} = 0$$

$$\therefore x^2 - 3\,a = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{3\,a}$$

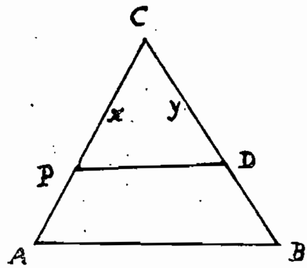
Pero $\text{A D} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{3\,a}} = \frac{a\sqrt{3\,a}}{3\,a} = \frac{1}{3}\sqrt{3\,a}$

Por consiguiente, se deduce de esta expresión que la anchura del redil debe ser igual a la tercera parte de su largor.

9.—*Bisecar el triángulo A B C por la línea más corta P D.*

Hagamos B C$=a$, A C$=b$, C P$=x$, y C D$=y$.

Entonces, según el postulado del problema, tenemos:



Area Δ A B C 2 área Δ P D C

$$\therefore \tfrac{1}{2}\, ab \text{ sen } C = 2 \times \tfrac{1}{2}\, xy \text{ sen } C$$

$$\therefore 2\, x\, y = ab, \text{ e } y = \frac{ab}{2\, x}$$

Ahora, por la Trigonometría Plana, tenemos:

$$PD^2 = CP^2 + CD^2 - 2\, CP.\ CD.\cos C$$

Luego, la función propuesta será:

$$y = x^2 + \frac{a^2\, b^2}{4\, x^2} - a\, b \cos C = \text{un mínimo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = 2\, x - \frac{a^2\, b^2.\ 8\, x}{16\, x\, 4} = 2\, x - \frac{a^2\, b^2}{2\, x^3} = 0,$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{a\, b}{2}}, \text{ e } y = \frac{ab}{2\, x} = \sqrt{\frac{ab}{2}}$$

De aquí, se deduce que C P$=$C D

10.—*La superficie total de un cono recto contiene c pies de superficie; se pide sus dimensiones cuando el contenido del cono sea un máximo.*

Sea x= el radio de la base, y Z=la altura oblicua; entonces tenemos:

$$\text{circunferencia base} = 2\,\pi\, x;\ \text{área base} = \pi\, x^2;$$

Superficie convexa $=\frac{1}{2}$ circunferencia base $\times$ altura oblicua$=\pi\, x \times Z$;

$$\therefore \text{ Superficie total del cono} = \pi\, x^2 + \pi\, x \times Z = c$$

$$\therefore Z = \frac{c}{\pi\, x} - x;$$

$$\therefore \text{ altura perpendicular cono} = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{\pi^2 x^2} - 2\, x^2} \ldots (1)$$

Pero $c = \pi\, x^2$

De donde $x^2 = \frac{c}{\pi}$

$$\therefore \text{ altura perpendicular cono} = \sqrt{\frac{c^2}{\pi^2 x^2} - \frac{2\,c}{\pi}}$$

Volumen del cono$=\frac{1}{3}$ área base $\times$ altura perpendicular.

$$\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\,\pi\, x^2 \sqrt{\frac{c^2}{\pi^2\, x^2} - \frac{2\,c}{\pi}} = \text{un máximo.}$$

Elevando al cuadrado, despreciando el factor constante, multiplicando por $\frac{\pi}{c}$ los dos términos bajo el radical, la función propuesta será:

$$y=x^4\left(\frac{c}{\pi\, x^2}-{}^2\right)=\frac{c}{\pi}\,x^2-2\,x^4=\text{un máximo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\,c}{\pi}\,x-8\,x^3=0$$

$$\therefore\ \frac{2\,c}{\pi}-8\,x^2=0$$

$$\therefore\ 8\,x^2=\frac{2\,c}{\pi}$$

$$\therefore\ x^2=\frac{e}{4\,\pi}$$

$$\therefore\ x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\pi}}$$

y

$$z=\frac{c}{\pi\, x}-x$$

Ahora, substituyendo en esta expresión el valor de x, tenemos:

$$Z=\frac{c}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{c}{\pi}}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\pi}}$$

Y, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\pi}}$, nos queda:

$$\tfrac{1}{2}\,Z\sqrt{\frac{c}{\pi}} = \frac{c}{\pi} - \frac{c}{4\,\pi} = \frac{3\,c}{4\,\pi}$$

De donde

$$Z = \frac{\dfrac{3\,c}{4\,\pi}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c}{\pi}}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{\pi}}.$$

Por consiguiente, se deduce de esta expresión que la altura oblicua es tres veces el radio de la base.

11.—*Sea* r *el radio de una lámina circular de estaño; se necesita saber cuáles serán las dimensiones de un sector extraído de aquella, que forme un barco cónico de la mayor capacidad posible.*

Sea x el largor del arco del sector. Ahora, cuando el sector se enrolle para formar el cono, x será la circunferencia de la base y r la altura oblicua.

$\therefore$ diámetro de la base $= \dfrac{x}{\pi}$ y radio de la base $= \dfrac{x}{2\,\pi}$

$$\therefore \text{ altura perpendicular del cono} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4\,\pi^2}\right)}$$

$$\text{y el área de la base} = \frac{\pi}{4} \times \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{x^2}{4\,\pi}$$

$\therefore$ la capacidad $= \frac{1}{3}$ área de la base por altura perpendicular

$$\therefore \text{ la capacidad} = \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{4\,\pi} \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4\,x^2}\right)} = \text{un máximo.}$$

Elevando al cuadrado y despreciando los factores constantes, la función propuesta será:

$$y = x^4 \left(r^2 - \frac{x^2}{4\,\pi^2}\right) = \text{un máximo.}$$

O bien

$$y = x^4\,r^2 - \frac{x^6}{4\,\pi^2} = \text{un máximo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,x^3\,r^2 - \frac{6}{4\,\pi^2}\,x^5 = 0$$

$$\therefore\ 4\,x^3\,r^2 - \frac{3}{2\,\pi^2}\,x^5 = 0$$

$$\therefore\ 4\,r^2 - \frac{3}{2\,\pi^2}\,x^2 = 0$$

$$\therefore\ \frac{3\,x^2}{2\,\pi^2} = 4\,r^2$$

$$\therefore\ 3\,x^2 = 8\,\pi^2\,r^2$$

$$\therefore\ x^2 = \frac{8\,\pi^2\,r^2}{3}$$

$$\therefore\ x = \sqrt{\frac{8\,\pi^2\,r^2}{3}}$$

$$\therefore\ x = \pi\,r\,\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\therefore\ x = 2\,\pi\,r\,\sqrt{\frac{2}{3}}$$

12.—*De todos los triángulos con igual base* a *e idéntico perímetro* 2 p, *el isósceles tiene la mayor superficie.*

Sea x uno de los lados; entonces el otro lado será $= 2\,p - a - x$.

Por un bien conocido problema de Trigonometría Plana, se tiene:

$$\text{Area}\ \Delta = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-x)\,(p-(2\,p-a-x))} = \text{un máximo.}$$

$$\therefore\ y=(p-x)\ (p-2\ p+a+x)=\text{un máximo.}$$

$$\therefore\ y=(p-x)\ (a+x-p)=\text{un máximo.}$$

Diferenciando esta función e igualando a cero, tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=(p-x)-(a+x-p)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=p-x-a-x+p=0$$

$$\frac{dy}{dx}=2\ p-2\ x-a=0$$

$$\therefore\ -2\ x=a-2\ p$$

$$\therefore\ -x=\frac{a}{2}-p$$

$$\therefore\ x=p-\frac{a}{2}$$

Y aplicando este valor de x en la expresión del otro lado, nos queda:

$$2\ p-a-p+\frac{a}{2}$$

O bien

$$p-a+\frac{a}{2}=p-\frac{a}{2}$$

Luego, el tercer lado es igual al segundo y el triángulo de mayor superficie es el isósceles.

ISMAEL GAJARDO R.

Lo Espejo, 23 de Noviembre de 1915.