

Estudios en honor de
Francisco Javier Domínguez
AUCh, 5ª Serie, N° 8 (1985): 635-653

ANÁLISIS DE LA PERIODICIDAD EN SERIES HIDROLOGICAS

BONIFACIO FERNÁNDEZ L.
Universidad Católica de Chile

INTRODUCCIÓN

El análisis y la modelación de series de tiempo de fenómenos hidrológicos se ha hecho cada vez más frecuente como una herramienta interesante en el estudio del comportamiento de sistemas de aprovechamiento de recursos de agua. El análisis estadístico de la serie puede estar orientado a aumentar el conocimiento que se tiene sobre el fenómeno en particular, o a su modelación matemática con el objeto de estudiar la respuesta de una obra frente a situaciones distintas a las presentadas en los registros históricos, pero igualmente probables y compatibles con ellas. El análisis se puede desarrollar de distintas maneras, dependiendo del sistema de que se trate el problema que se desea estudiar, de las disponibilidades de datos básicos y de los modelos aplicables. En general, dependiendo del sistema particular de que se trate, se puede requerir ya sea la generación de series sintéticas univariadas o multivariadas, anuales o estacionales. Las técnicas para analizar, modelar y generar series hidrológicas han sido ampliamente difundidas en la literatura. Entre ellas, destacan las propuestas por Thomas y Fiering (1963), Yevjevich (1963) Roesner y Yevjevich (1966), Matalas (1967), Delleur *et al.* (1976), Hipel *et al.* (1977), Salas *et al.* (1980) y Loucks *et al.* (1981). Los modelos más populares, tanto para series anuales como para series periódicas, han sido los Autorregresivos (AR) y los Autorregresivos de Promedios Móviles (ARMA) que tuvieron un gran impulso y difusión a partir de la obra de Box y Jenkins (1970).

Las propiedades estadísticas básicas de cualquier fenómeno hidrológico consideradas en la serie de tiempo son la tendencia, la periodicidad, la distribución marginal de la variable y la estructura de dependencia temporal de la serie. Una discusión de la importancia de estas propiedades puede encontrarse en los trabajos de Fiering y Jackson (1971), Yevjevich (1972), Lawrence y Kottegoda (1977), McLeod *et al.* (1977), Kottegoda (1980), Decoursey y Shaake (1982) y Yevjevich (1984). La existencia de tendencias de largo plazo en series de tiempo de fenómenos naturales es normalmente atribuida a la influencia de intervenciones humanas. El comportamiento periódico refleja el efecto de fenómenos astronómicos con ciclos de longitud de un año o menores. Para modelar las propiedades estadísticas de la variable aleatoria que representa el fenómeno en cuestión se adopta alguna función de distribución de probabilidades. Finalmente, las variables hidrológicas, corrientemente presentan alguna dependencia en el tiempo como consecuencia de la transferencia de agua que se produce de un periodo a otro en los sistemas naturales. La importancia de esta dependencia es función del fenómeno en sí; por lo tanto, del sistema físico de que se trate, y de la unidad de tiempo utilizada para discretizar la serie de tiempo.

Este artículo se concentra en el estudio y análisis de los aspectos relacionados con la periodicidad de los fenómenos hidrológicos. En primer lugar, se muestra la forma en que ella se manifiesta mediante algunos ejemplos reales. A continuación se presenta el comportamiento de las propiedades estadísticas consideradas en la representación del proceso. Finalmente, se analiza la manera en que se incorpora la periodicidad en la modelación y algunos de los problemas relacionados.

PERIODICIDAD EN SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICAS

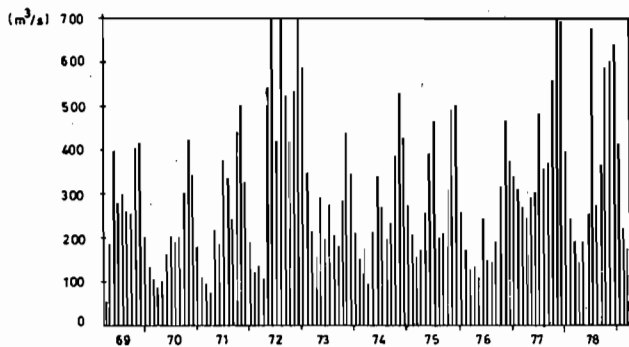
El fenómeno típico modelado en hidrología corresponde a las series de caudales ya que pueden ser usadas directamente como información de entrada en estudios de planificación y operación de sistemas de recursos de agua. Sin embargo, también se ha investigado la modelación de otras variables hidrometeorológicas, algunas veces para ser usadas como información de entrada a modelos determinísticos de modo de producir series de caudales, pero también como una forma de analizar el fenómeno en sí. Richardson (1981) da cuenta de la modelación de muestras diarias de precipitación, temperatura y radiación solar, para evaluar el efecto que tendrían cambios hidrometeorológicos sobre el escurrimiento. También se han analizado y modelado el nivel de lagos y del agua subterránea (Law,

1974 y Salas *et al.*, 1980). Así como la oferta de recursos de agua ha sido considerada como un proceso aleatorio, también la demanda es de naturaleza estocástica debido al efecto que tienen las variables climatológicas y otras no controladas sobre el uso del agua. Algunos ejemplos típicos de diferentes procesos hidrológicos periódicos que han sido modelados con técnicas de hidrología estocástica se muestran en la Figura 1.

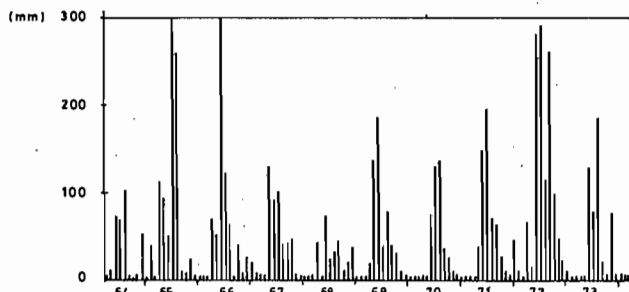
Cuando la unidad de tiempo usada para representar la serie es menor que un año, se hace evidente el comportamiento periódico del proceso. Las unidades de tiempo típicas usadas en la modelación de series hidrológicas son semestres, trimestres, meses, semanas y días. A medida que la unidad de tiempo se acorta, la cantidad de información contenida en la serie aumenta, pero el fenómeno comienza a mostrar propiedades más complejas y la modelación se dificulta. Ella se debe seleccionar de acuerdo con los objetivos del estudio. La generación sintética de valores medios anuales se ha orientado al diseño de obras de gran capacidad que pueden traspasar volúmenes importantes de un año a otro. Comúnmente se han usado caudales medios mensuales para dimensionar obras de tamaño medio o pequeño, para estudios de operación y diseño o de planificación económica regional. El uso de unidades de semanas o días es común en estudios de operación y previsión a corto plazo. El modelo a elegir puede ser fundamentalmente distinto, dependiendo de la resolución temporal requerida. Es evidente que en el análisis de series anuales la persistencia de largo plazo es importante; para series trimestrales o mensuales el efecto de la periodicidad pasa a ser la característica dominante, mientras que en series semanales o diarias la intermitencia o la direccionalidad es lo que concentra el interés.

Considerando la vida útil de los proyectos de ingeniería y la longitud de las series de datos disponibles hasta ahora, no se ha podido confirmar la existencia de periodicidades mayores que un año en procesos hidrológicos. La periodicidad en las series de tiempo hidrológicas es impuesta por el efecto que tienen los ciclos astronómicos sobre los fenómenos naturales. El giro anual de la tierra alrededor del sol crea un efecto estacional. La rotación diaria de la tierra sobre sí misma genera también un comportamiento periódico. Según Kottegoda (1980) estas periodicidades son de naturaleza determinística con respecto a la frecuencia de ocurrencia de ellas. Algunas veces se puede detectar, en series hidrológicas relacionadas con la demanda de agua, el efecto de la periodicidad de ciclos económicos o sociales. El ciclo económico-social típico es la semana y se visualiza claramente en series de demandas de sistemas hidroeléctricos.

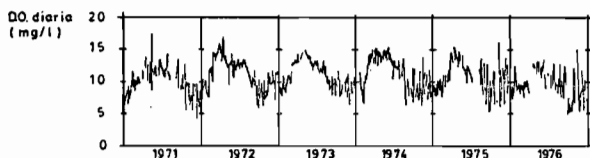
La periodicidad también debe ser considerada en la representación de



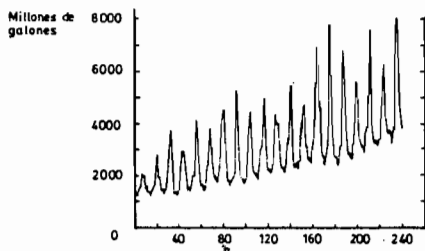
a) Gastos medios mensuales. Río Maule en Cotbún.



b) Precipitaciones totales mensuales Talca.



c) Demanda química de oxígeno diaria rio Great Miami, Ohio.



d) Demanda mensual de agua potable para la ciudad de Dallas, Texas. 1950 - 1969.

Fig. 1. Ejemplos de series periódicas en Hidrología

series multivariadas. Estas son necesarias cuando se requiere más de una serie para representar adecuadamente el proceso y existe una dependencia estructural entre ellas. Como casos típicos se pueden citar el de la modelación de series de caudales en varios puntos de una región, o el de precipitación y caudales en la misma cuenca, o la oferta y la demanda de agua en un sistema. Curry y Bras (1978) y Pereira *et al.* (1984) presentan algunos ejemplos de modelaciones de series multivariadas periódicas.

Debido a que muchas veces las series de oferta y de demanda no están en fase, existe un volumen importante de almacenamiento necesario para traspasar recursos desde la denominada estación húmeda a la seca. Lansigan (1982) analiza en detalle el impacto de la periodicidad en problemas relacionados con embalses, mientras que Hoshi y Burges (1978) ejemplifican su importancia. Influencias similares pueden encontrarse en problemas relacionados con sequías.

PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE SERIES PERIÓDICAS EN HIDROLOGÍA

La estacionalidad, o la periodicidad en general, se refleja en el comportamiento de la distribución marginal de la variable y de la estructura de dependencia temporal. Así es como el promedio, la varianza, el coeficiente de asimetría y los demás momentos de orden superior muestran un patrón de comportamiento periódico. Se acostumbra suponer que las series de tiempo hidrológicas son periódicamente estacionarias; esto es, los efectos periódicos se repiten en la misma época cada año. La periodicidad del promedio y de la varianza son fáciles de observar en un gráfico de la serie de tiempo. La detección de periodicidades en momentos de orden superior no es tan simple y, en algunas circunstancias, pueden requerirse técnicas especiales para ello.

Una serie con w períodos por año y N años de longitud se acostumbra representar por $X_{\gamma,\tau}$ donde $\gamma = 1, 2, \dots, N$ es un índice para representar el año y $\tau = 1, 2, \dots, w$ representa el período. De esta forma $X_{\gamma,\tau}$ es el valor de la variable durante el período τ del año γ . La existencia de periodicidad hace que las propiedades estadísticas de la serie cambien durante el año, de manera que el valor de ellas depende del período y por lo tanto deben ser calculadas para cada valor de τ .

El promedio muestral y la varianza de la serie para cada período τ se calcula como:

$$\bar{X}_{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{\gamma=1}^N X_{\gamma,\tau} ; \tau = 1, 2, \dots, w \quad (1)$$

$$S_{\tau}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{v=1}^N (X_{v,\tau} - \bar{X}_{\tau})^2; \tau = 1, 2, \dots, w \quad (2)$$

similarmente los momentos periódicos de orden superior como el coeficiente de asimetría:

$$g_{\tau} = \frac{N}{(N-1)(N-2)S_{\tau}^3} \sum_{v=1}^N (X_{v,\tau} - \bar{X}_{\tau})^3; \tau = 1, 2, \dots, w \quad (3)$$

La estructura de dependencia temporal del proceso se refleja en la autocorrelación. Esta se estima como el coeficiente de correlación de desfase k del período τ , descrito como $r_{\tau}(k)$, el cual representa la dependencia lineal que existe entre los períodos τ y $\tau-k$. Se calcula como:

$$r_{\tau}(k) = \frac{1}{N S_{\tau} S_{\tau-k}} \sum_{v=1}^N (X_{v,\tau} - \bar{X}_{\tau})(X_{v,\tau-k} - \bar{X}_{\tau-k}) \quad (4)$$

Salas *et al.* (1980) postulan que desde un punto de vista estadístico riguroso una serie de tiempo de una variable periódica es en esencia un proceso multivariado, con una distribución de probabilidad diferente para cada uno de los períodos. Por ejemplo, en el caso de variables mensuales, el proceso multivariado estaría compuesto por un conjunto de 12 variables modeladas simultáneamente. Una manera simple de abordar el problema consiste en suponer el mismo tipo de distribución marginal para todos los períodos y permitir una variación periódica en los parámetros. Algunos ejemplos de parámetros periódicos obtenidos de series de caudales se muestran en la Figura 2. Mientras la mayoría de los estudios hidrológicos consideran la periodicidad en el promedio y en la varianza, algunas veces incluso en el coeficiente de correlación, la periodicidad del coeficiente de asimetría raramente se toma en cuenta. A medida que el orden del momento aumenta, la variabilidad del muestreo también lo hace y es más difícil distinguir entre la periodicidad propiamente tal y el ruido introducido por la aleatoriedad de la muestra. Normalmente se supone que si la periodicidad del estimador es mayor que la varianza muestral, ello se debe a que el parámetro presenta efectos periódicos.

Para el caso de variables asimétricas periódicas, la varianza del estimador del coeficiente de asimetría, g_{τ} , está dada por:

$$\text{Var } g_{\tau} = \frac{1}{N} (6 + 29,3 \gamma_{\tau}^2 + 12 \gamma_{\tau}^4) \quad (5)$$

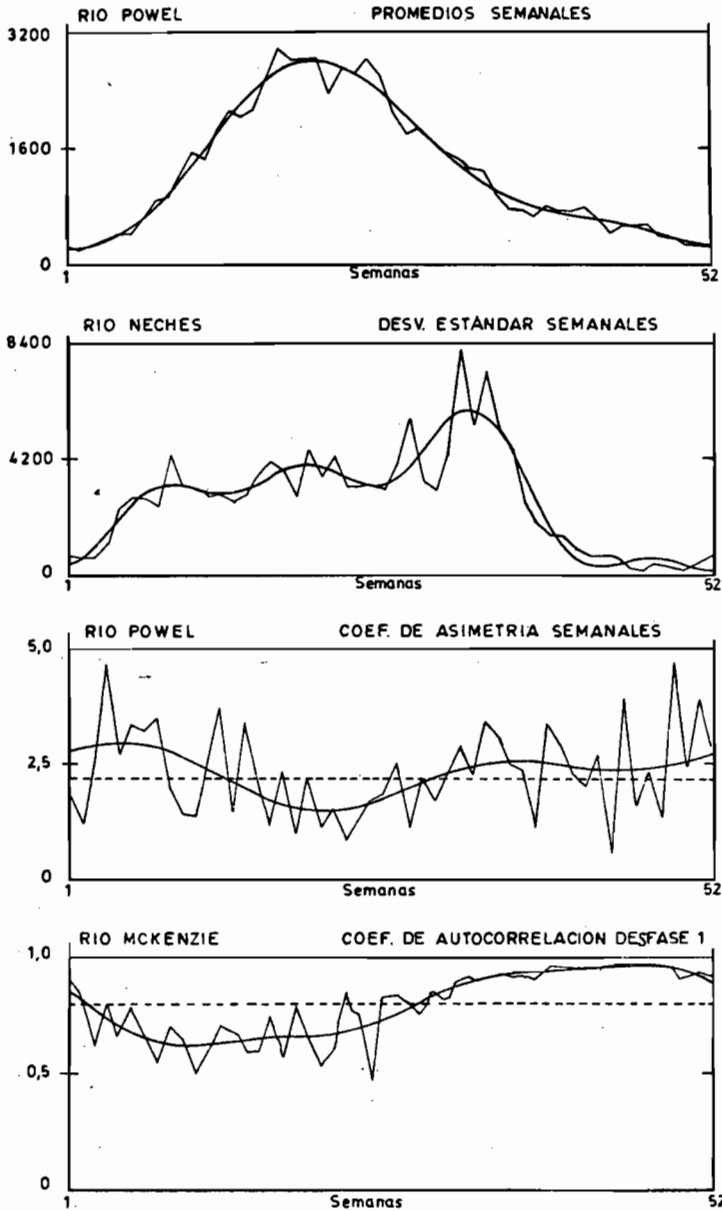


Fig. 2. Ejemplos de parámetros periódicos en series semanales de caudales, y ajuste de series de Fourier a los valores observados

donde γ_τ es el coeficiente de asimetría de la población. Se aprecia, además, que la varianza del coeficiente de asimetría crece rápidamente para variables no gaussianas. Por ejemplo, para una muestra normal de tamaño $N = 40$ la desviación estándar de g_τ es 0,39, pero si se supone una población asimétrica con $\gamma_\tau = 3$, entonces aumenta a 5,6.

Resultados similares se obtienen para el estimador del coeficiente de correlación cuya varianza esta dada por:

$$\text{Var } r_{1,\tau} = \left(\frac{1 - \rho_{1,\tau}^2}{N} \right)^2 + \frac{3\rho_{1,\tau} g^2}{4N} (2 + \rho_{1,\tau}^2 - 3\rho_{1,\tau}) \quad (6)$$

Se observa que la existencia de asimetría también aumenta la varianza del estimador de r .

Además de la observación visual mediante un gráfico de la serie de tiempo y del estudio de la periodicidad de los parámetros, el análisis espectral y el correlograma son técnicas valiosas para detectar la periodicidad de fenómenos hidrológicos.

Si la serie periódica multivariada $X_{\gamma,\tau}$, se convierte en una serie univariada, mediante la transformación:

$$X_t = X_{(v-1)w+\tau}; t = 1, 2, \dots, wN \quad (7)$$

Entonces el promedio global se calcula como:

$$\bar{X} = \frac{1}{wN} \sum_{v=1}^N \sum_{\tau=1}^w X_{(v-1)w+\tau} \quad (8)$$

y el coeficiente de autocorrelación de desfase m mediante:

$$r(m) = \left\{ \sum_{t=1}^{wN-1} [(X_t - \bar{X})(X_{t+m} - \bar{X})] \right\} / \sum_{t=1}^{wN} (X_t - \bar{X})^2 \quad (9)$$

El correlograma consiste en el gráfico de $r(m)$ en función de m . Debido a que el correlograma de cualquier serie periódica es también periódico, Kottegoda (1980), es una herramienta simple para detectar periodicidad.

El análisis espectral se ha usado ampliamente en hidrología para detectar ciclos en datos hidrológicos. Así lo han hecho, por ejemplo, Quimpo (1967), Roesner y Yevjevich (1966). Consiste en una transformada de Fourier de la función de autocorrelación y entrega información estadística cuantitativa en el dominio de la frecuencia. Un gráfico de la Función de Densidad Espectral (*SDF*) en función de la frecuencia puede indicar la existencia de periodicidades en la serie. En estos casos, la *SDF* muestra

una tendencia general descendente, interrumpida por altos y bajos donde las periodicidades importantes corresponden a las frecuencias que presentan los valores altos.

Según Yevjevich (1972) un estimador eficiente de la Función de Densidad Espectral para una serie de tiempo discreta está dada por:

$$V(f) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^M D(m)r(m) \cos(2\pi f m) \right\} \quad (10)$$

donde $V(f)$ es el estimador de la densidad espectral, $r(m)$ el coeficiente de autocorrelación de desfase m , calculado según (9), f la frecuencia en ciclos/tiempo, y M el máximo desfase considerado en el análisis. La elección de M es arbitraria, pero usualmente está en el rango de un quinto a un décimo de la cantidad total de datos disponibles para la serie. $D(m)$ es una función para suavizar las distorsiones que pueden producirse como resultado de pequeñas variaciones de muestreo. Para ello se puede usar:

$$D(m) = \frac{1 + \cos 2\pi f m}{2} \quad (11)$$

PROBLEMAS DE LA PERIODICIDAD Y SU REPRESENTACIÓN

El comportamiento periódico de los parámetros que definen la distribución marginal de la variable y la autocorrelación puede representarse basado en una estimación de ellos a partir de la serie de datos disponibles de acuerdo a las ecuaciones (1) a la (4). Sin embargo, si el número de períodos es importante, como ocurre en series semanales o diarias, la cantidad de parámetros que se necesitan puede ser demasiado grande. También debe considerarse que los estimadores están sujetos a variaciones de muestreo y por lo tanto a cambios más o menos aleatorios de un período al siguiente. Este efecto es más importante a medida que se consideran momentos de mayor orden y se acorta la unidad de tiempo utilizada en la discretización de la serie. Con el objeto de eliminar esta variabilidad y obtener parsimonia en la modelación del fenómeno, se recurre a una representación paramétrica de las propiedades periódicas. El método más usado consiste en el uso de series de Fourier. Si u_τ es el valor de una propiedad obtenida de la muestra para el periodo τ , el valor ajustado por una serie de Fourier, denominado u_τ^* es:

$$u_\tau^* = \bar{u} + \sum_{j=1}^h \{A_j \cos(2\pi j\tau/w) + B_j \text{sen}(2\pi j\tau/w)\} \quad (12)$$

donde u_τ^* puede representar el valor de cualquiera de las propiedades estadísticas del período τ y \bar{u} es el promedio del valor de u_τ en todos los períodos. A_j y B_j son los coeficientes de la serie de Fourier para la armónica j y h es el número total de armónicas consideradas en la representación. Los coeficientes de la serie se calculan según:

$$A_j = \frac{2}{w} \sum_{\tau=1}^w u_\tau \cos(2\pi j\tau/w) ; j = 1, 2, \dots, w \quad (13)$$

y

$$B_j = \frac{2}{w} \sum_{\tau=1}^w u_\tau \sin(2\pi j\tau/w) ; j = 1, 2, \dots, w \quad (14)$$

Cuando w es par, el cálculo de los coeficientes A_h y B_h cambia, de manera que B_h es nulo y A_h vale la mitad del valor que se obtiene de (13).

Se han propuesto varios métodos para seleccionar el número de armónicas necesarias para representar al parámetro en cuestión. Para fijar un orden de magnitud se puede decir que alrededor de tres armónicas son suficientes para series semanales y hasta 6 para el caso de series diarias. La medida básica para seleccionar el número adecuado es la varianza explicada por la j -ésima armónica, dada por:

$$\text{Var } h_j = \frac{A_j^2 + B_j^2}{2} \quad (15)$$

Basado en ello, se calcula el periódograma acumulado que es la proporción de la varianza explicada por h armónicas como:

$$P_h = \sum_{j=1}^h \text{Var } h_j / S_u^2 \quad (16)$$

donde S_τ^2 es la varianza del parámetro debida al efecto de la periodicidad:

$$S_u^2 = \frac{1}{w} \sum_{\tau=1}^w (u_\tau - \bar{u})^2 \quad (17)$$

Algunos ejemplos de representación mediante series de Fourier de parámetros periódicos de series hidrometeorológicas reales están incluidos en la Figura 2.

La periodicidad en el promedio y la varianza son claramente detectables y caracterizables. La periodicidad en parámetros de orden superior, como es el coeficiente de asimetría, o en la estructura de autocorrelación, son más difíciles de detectar y de representar.

Tong (1983) advierte que si la periodicidad sólo afecta al promedio y la varianza, mientras los momentos de orden superior y la autocorrelación pueden considerarse constantes a lo largo del año, la serie es no periódica en esencia, ya que mediante una simple estandarización periódica puede ser transformada en una serie estacionaria:

$$Z_{(v-1)w+\tau} = \frac{X_{v,\tau} - \mu_\tau}{\sigma_\tau} \quad (18)$$

De modo que, entonces, Z es una serie con promedio cero y varianza uno y puede ser modelada y reproducida utilizando modelos desarrollados para series no periódicas. Los valores de la población μ_τ y σ_τ se obtienen, ya sea como los valores estimados directamente de la muestra o la representación paramétrica de ellos. Este ha sido el procedimiento más popular utilizado en hidrología para la modelación de series mensuales. Sin embargo, de acuerdo a las observaciones hechas por Lawrence y Kottegoda (1977), tiene algunas dificultades teóricas. En general, se aprecia que después de una estandarización periódica, todavía puede haber cierta periodicidad en la correlación y en los momentos de orden superior que, obviamente, no se puede remover por el simple hecho de intentar convertir la serie en un ruido blanco.

Una de las primeras etapas en la modelación de una serie hidrológica corresponde a la detección y remoción de las tendencias de largo plazo que puedan existir en los datos. Varias pruebas se han desarrollado para detectarlas y Hirsch y Slack (1984) han extendido algunas de ellas para considerar series periódicas. Si bien la caracterización de una tendencia de largo plazo puede realizarse sobre la base de las pruebas disponibles, su extrapolación más allá de los registros existentes, supone una especulación sobre el comportamiento futuro del sistema.

Cuando la unidad de tiempo utilizada para discretizar la serie es menor que un año, además de la aparición de una marcada periodicidad, se hacen evidentes algunos efectos adicionales que inevitablemente deben considerarse en la modelación. En series de tiempo de caudales, la asimetría de la variable pasa a ser importante y la serie deja, por lo tanto, de ser gaussiana. Esto hace que los bien conocidos modelos normales no puedan ser utilizados directamente y que, además, sea necesario analizar los efectos de la periodicidad en el coeficiente de asimetría.

El tipo de distribución usado está relacionado con el fenómeno que representa la variable y con la unidad de tiempo de la serie. Los caudales anuales se consideran sin mayores dificultades como gaussianos. Para

intervalos de tiempo menores, el alejamiento de un comportamiento gaussiano es importante, ya que la asimetría parece aumentar en la misma medida en que la unidad de tiempo decrece. A pesar de que varias funciones de distribución se pueden ajustar a variables asimétricas, las logarítmica normal y gama de tres parámetros son las más usadas en hidrología. Lettenmaier y Burges (1977) hacen notar que, dado lo corto de los registros de caudales disponibles, es difícil distinguir entre los dos modelos de distribución mencionados cuando se trata de ajustarlos a los datos históricos. Klemes (1978) ha postulado que las distribuciones aplicables a las series de caudales están limitadas a aquellas asimétricas con límite inferior igual a cero.

El problema de la modelación de series de caudales con distribuciones asimétricas ha sido enfrentado mediante varios métodos. Uno recomendado por Box y Cox (1964) consiste en transformar la serie mediante el uso de logaritmos o potenciación, de manera de obtener una serie más simétrica. Otro de los enfoques consiste en encontrar las propiedades estadísticas de los residuos del modelo, de manera de reproducir a través de ellos la asimetría de la serie, tal como lo sugiriera Fiering (1967) para modelos autoregresivos de primer orden, tanto periódicos como anuales. Recientemente se han desarrollado algunos modelos que pueden acomodar, en su estructura, distribuciones marginales no simétricas de la variable de interés, como son los propuestos por Weiss (1977), Lawrance y Lewis (1981) y Fernández (1984).

Se ha propuesto varios procedimientos de transformación con el objeto de poder reproducir series de caudales asimétricas utilizando modelos gaussianos. El más popular, y a la vez el más simple, se basa en la suposición de que la distribución marginal puede ser adecuadamente representada mediante una logarítmica normal. Si la secuencia $X_{1,\tau}, X_{2,\tau}, \dots, X_{v,\tau}, \dots, X_{N,\tau}$ se supone distribuida con una logarítmica normal, una transformación periódica del tipo:

$$Y_{v,\tau} = \log (X_{v,\tau} - a_{\tau}) ; \tau = 1, 2, \dots, w \quad (19)$$

la convierte en variables normalmente distribuidas y la nueva serie $Y_{v,\tau}$ puede ser modelada utilizando los modelos gaussianos. El problema en el uso de las transformaciones es que las propiedades reproducidas por el modelo corresponden a las de la serie transformada y no necesariamente a las de la serie original. Para corregir esta anomalía, Matalas (1967) presentó algunas relaciones entre los momentos de la serie original y los de la serie transformada para procesos no periódicos. Hirsch (1979)

extiende estas relaciones para considerar el caso de series periódicas, las que se expresan como:

$$\mu_{x_t} = a_t + \exp(0,5 \sigma_{y_t}^2 + \mu_{y_t}) \quad (20)$$

$$\sigma_{x_t}^2 = \exp 2(\sigma_{y_t}^2 + \mu_{y_t}) - \exp(\sigma_{y_t}^2 + 2\mu_{y_t}) \quad (21)$$

$$\gamma_{x_t} = \frac{\exp(3 \sigma_{y_t}^2) - 3 \exp(\sigma_{y_t}^2) + 2}{[\exp(\sigma_{y_t}^2) - 1]^{1,5}} \quad (22)$$

donde μ , σ y γ representan el promedio, la varianza y el coeficiente de asimetría, respectivamente. A pesar de que el uso de estas ecuaciones permite conservar los primeros tres momentos de la distribución marginal de la serie original, existe aún una diferencia en la estructura de autocorrelación. Matalas (1967) también propuso una ecuación para la corrección del coeficiente de autocorrelación de desfase uno, para el caso de procesos estacionarios autoregresivos de primer orden. Hirsch (1979) utilizó la misma ecuación para estimar los parámetros en un modelo periódico. Fernández (1984) muestra que la ecuación general para un proceso periódico AR(1) en el dominio de los logaritmos está dada por:

$$\rho_{x_t}(1) = \frac{\exp[\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t-1}} \rho_{y_t}(1)]^{-1}}{[\exp(\sigma_{y_t}^2) - 1]^{1/2} [\exp(\sigma_{y_{t-1}}^2) - 1]^{1/2}} \quad (23)$$

Se observa que con el objeto de calcular los ajustes entre ambos procesos, suponiendo que ambos son del tipo AR(1), se debe resolver un sistema de ecuaciones no lineales para los cuatro parámetros involucrados. En procesos de orden superior, la cantidad de parámetros a corregir aumenta y no se dispone de ecuaciones explícitas para ello.

Thomas y Fiering (1963) propusieron el uso de la transformación de Wilson y Hirlferty para reproducir la variable independiente en un proceso AR(1) de promedio cero y varianza uno. En este caso el ruido es reproducido mediante la relación:

$$\varepsilon_{v,\tau} = \frac{2}{\gamma_{e_\tau}} \left(1 + \frac{\gamma_{e_\tau}}{6} \eta_{v,\tau} - \frac{\gamma_{e_\tau}}{36} \right)^3 - \frac{2}{\gamma_{e_\tau}} \quad (24)$$

donde η es una variable normal estándar y el coeficiente de asimetría γ_{ϵ_t} del residuo está relacionado con el coeficiente de asimetría de la serie, según la relación dada por Fiering y Jackson (1971):

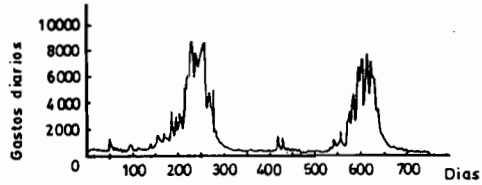
$$\gamma_{\epsilon_t} = \frac{\gamma_{x_t} - \gamma_{x_{t-1}} r_{x_{t-1}}^3}{[1 - r_{x_t}^2]^{1.5}} \quad (25)$$

El uso de la transformación de Wilson-Hilferty lleva implícito una aproximación a una variable del tipo Chi cuadrado y está teóricamente limitado a valores pequeños del coeficiente de asimetría. Los efectos indeseables que esto produce comienzan a ser importantes para $\gamma_{x_t} > 2$. Kirby (1972) propuso una modificación de esta transformación que la hace utilizable para valores de γ_{x_t} de hasta 9.0. A pesar de que este método permite reproducir el coeficiente de asimetría, la distribución marginal resultante de la variable $X_{v,t}$ es desconocida y queda fuera de control. Klemes y Boruvka (1974) propusieron una técnica más sofisticada que reproduce procesos AR(1) no periódicos con distribuciones marginales gama.

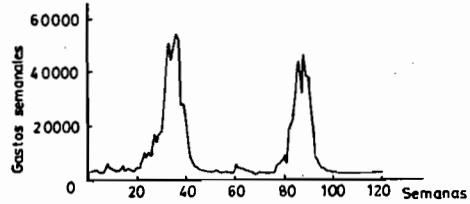
Cuando el intervalo de tiempo usado para discretizar la serie es realmente corto, se hacen evidentes algunas propiedades adicionales como es la intermitencia en series de precipitaciones y lo que se ha denominado direccionalidad en el caso de caudales. Esta última es un reflejo de la conocida propiedad de los hidrogramas, en los cuales la subida es apreciablemente más rápida que la recesión. En la Figura 3 se puede apreciar lo que ocurre con una serie de caudales a medida que la unidad de tiempo utilizada para discretizarla se acorta. Una de las críticas que se les ha hecho a los modelos lineales gaussianos es la imposibilidad que tienen de reproducir series con claros signos de direccionalidad o irreversibilidad en el tiempo. Weiss (1975), Cox (1981), y Tong (1983) han observado que la existencia de direccionalidad es una consecuencia de la no linealidad o de la no normalidad del proceso y, por lo tanto, es un atributo que no podría ser reproducido por modelos lineales normales. En forma simple, se puede decir que una serie de tiempo es direccional, si sus propiedades estadísticas se alteran, cuando la dirección del eje del tiempo se invierte.

El método más simple para detectar la direccionalidad se basa en la observación de un gráfico de la serie. Si el tiempo que ocupa el proceso en ir hacia abajo es diferente que el que ocupa en ir hacia arriba, entonces la serie es irreversible. Weiss (1975) menciona las siguientes consecuencias estadísticas de la reversibilidad que pueden ser usadas para detectarla:

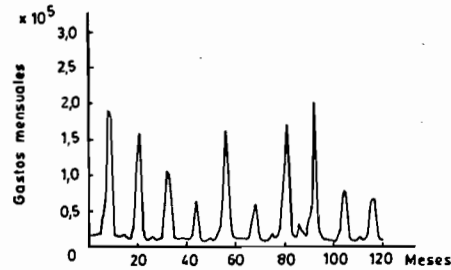
W (PERIODOS POR AÑO) = 365
 N (TAMAÑO DE LA MUESTRA) = 14600
 σ (DESVIACION ESTANDAR) = 1459
 g (ASIMETRIA) = 2,335
 r_1 (AUTOCORRELACION) = 0,986
 P $\{P(X_t > X_{t-1})\}$ = 0,334



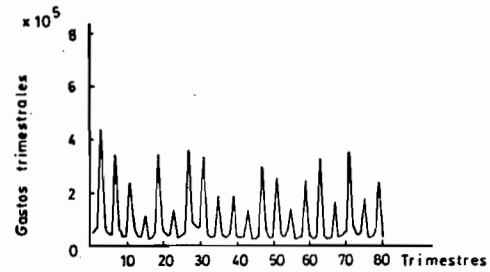
W = 52
 N = 2080
 σ = 1423
 g = 2,216
 r_1 = 0,913
 P = 0,425



W = 12
 N = 480
 σ = 1339
 g = 1,949
 r_1 = 0,650
 P = 0,505



W = 4
 N = 160
 σ = 1214
 g = 1,590
 r_1 = 0,168
 P = 0,552



W = 1
 N = 40
 σ = 335
 g = 0,228
 r_1 = 0,222
 P = 0,487

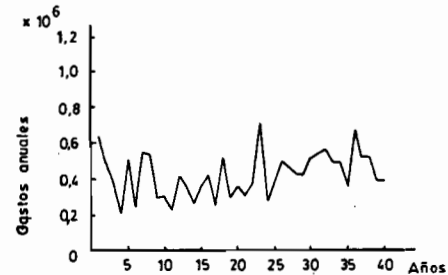


Fig. 3. Propiedades de la serie de caudales de 40 años del río Boise para diferentes intervalos de discretización

$$\text{Distrib. de } (X_t, X_{t+r}) = \text{Distrib. de } (X_{t+r}, X_t) \quad (26)$$

$$\text{Distrib. de } (X_t - X_{t-r}) = \text{Distrib. de } (X_{t-r} - X_t) \quad (27)$$

$$P(X_t - X_{t-r} < X) = P(X_{t-r} - X_t < X) \quad (28)$$

tal que la diferencia $(X_t - X_{t-r})$ tiene una distribución simétrica y, por lo tanto:

$$P(X_t < X_{t-r}) = P(X_{t+r} < X_t) = 1/2 \quad (29)$$

Aún no se ha investigado en detalle las consecuencias prácticas que podría tener el representar o no esta propiedad en las series de caudales.

CONCLUSIONES

Los problemas básicos que deben abordarse al estudiar series de tiempo de fenómenos hidrológicos corresponden al análisis y la modelación de la tendencia, la distribución marginal, la periodicidad de los parámetros y la dependencia temporal. En los párrafos anteriores se ha expuesto algunos de los métodos utilizados y las dificultades que se presentan en el análisis de series periódicas en hidrología.

Desde el punto de vista de la modelación propiamente tal, se debe tener en cuenta que si la periodicidad sólo afecta a los dos primeros momentos y la no normalidad puede ser reducida mediante una transformación simple, entonces el proceso puede ser representado por un modelo no periódico, una vez que se procede a transformar y estandarizar la serie. Si la periodicidad en la estructura de dependencia temporal es importante, entonces se requiere un modelo que tome en cuenta este aspecto, en forma explícita, ya que ello no se puede subsanar con una simple transformación. Se ha usado diferentes métodos para modelar series hidrológicas periódicas. Las técnicas básicas han sido el uso de modelos con parámetros periódicos, la modelación de procesos diferen-

ciados, la desagregación de valores anuales en valores estacionales y la agregación desde el nivel estacional al anual.

AGRADECIMIENTOS

Para la elaboración de este artículo se ha contado con financiamiento de la Dirección de Investigación de la Pontificia Universidad Católica de Chile a través del Proyecto *DIUC* 51/85 sobre Modelos Estocásticos para el Estudio y Análisis de Fenómenos Hidrológicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOX G.E.P. y D.R. COX. 1964. *An analysis of transformation (with discussion)*. J.R. Statist. Soc. B-26, pp. 211-252.
- BOX G.E.P. y G.M. JENKINS. 1976. *Time series analysis, forecasting and control*. Holden-Day Inc., San Francisco, California.
- COX, D.R. 1981. *Statistical analysis of time series: some recent developments*. Scand. Jour. Statistics, Vol. 8, pp. 93-115.
- CURRY, K. y R.L. BRAS. 1978. *Theory and applications of the multivariate broken line, disaggregation, and monthly autorregressive streamflow generation to the Nile river*. MIT, Cambridge, Mass, 416 pags.
- DELLEUR, J.W., P.C. TAO y M.L. KAVVAS. 1976. *An evaluation of the practicality and complexity of some rainfall and runoff time series models*. Water Resources Research. Vol 12 pp. 953-970.
- DECOURSEY, D.G. y J.C. SHAAKE. 1982. *Stochastic modeling in Hydrology*. In *Hydrologic modeling of small watersheds*. Capítulo 2. Editado por Haan, C.I., H.P. Johnson y D.L. Brakensiek. ASAE Monograph Number 5, Michigan.
- FERNÁNDEZ B. 1984. *Stochastic modeling of periodic streamflow series with gamma distribution*. Ph.D. Dissertation. Dept. of Civil Engineering. Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- FIERING, M.B. y B.B. JACKSON. 1971. *Synthetic streamflows*. American Geophysical Union, Water Resources Monograph n-1. 98 pags.
- FIERING, M.B. 1967. *Streamflow synthesis*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 139 p.
- HIPEL, K.W. y A.I. MCLEOD, y W.L. LENNOX. 1977. *Advances in Box-Jenkins modeling: 1-model construction*. Water Resources research. Vol 13 n-3, pp. 567-575.
- HIRSCH, R.M. 1979. *Synthetic Hydrology and Water Supply Reliability*. Water Resources Research, Vol. 15, N-6.
- HIRSCH, R.M. y J.R. SLACK. 1984. *A nonparametric trend test for seasonal data with serial dependence*. Water Resources Research. Vol 20. n-6, pp. 727-732.
- HOSHI, K. y S.J. BURGESS. 1979. *Disaggregation of streamflow volumes*. J. of the Hyd. Div. ASCE. 105 HY1, pp. 27-41.
- KIRBY, W. 1972. *Computer-oriented Wilson-Hirlferty transformation that preserves the first three moments and the lower bound of the Pearson type-3 distribution*. Water Resources Research, Vol. 8, n-5, pp. 1251-1254.
- KLEMES, V. 1978. *Physically based stochastic hydrologic analysis*. Advances in Hydroscience. Ven te Chow (ed), Vol. 11. Academic Press, New York, pp. 285-356.
- KLEMES, V. y L. BORUVKA. 1974. *Simulation of gamma-distributed first-order Markov Chain*. Water Resources Research, Vol. 10, n-1, pp. 87-91.
- KOTTEGODA, N.T. 1980. *Stochastic water resources technology*. John Wiley and Sons, New York.
- LANSIGAN, G. 1982. *Analysis of seasonal storage*. Ph. D. Dissertation. Colorado State University. Fort Collins, Colorado.
- LAW, A.G. 1974. *Stochastic analysis of groundwater level time series in the Western United*

States. Hydrology Papers n-68. Fort Collins, Colorado.

LAWRENCE, A.J. y P.A.W. LEWIS. 1981. *A New Autorregresive Time Series Model in Exponential Variables (NEAR(1))*. Adv. Appl. Prob., Vol. 3, pp 826-845.

LAWRENCE, A.J. y N.T. KOTTEGODA. 1977. *Stochastic modeling of riverflow time series*. J.R. Statistic Society, Series A, Vol. 140 Part 1, pp. 1-47, with Discussion.

LETTENMAIER, D.P. y S.J. BURGESS. 1977. *An operational approach to preserving skew in hydrologic models of long-term persistence*. Water Resources Research, Vol. 13, n-2, April, pp 281-290.

LOUCKS, D.P., J.R. STEDINGER y D.A. HAITH. 1981. *Water resources systems planning and analysis*. Prentice-Hall, New Jersey.

MATALAS, N.C. 1967. *Mathematical assessment of sythetic hydrology*. Water Resources Research, Vol. 3, n-4, pp. 937-945.

MCLEOD, A.I., K.W. HIPEL y W.C. LENNOX. 1977. *Advances in Box-Jenkins Modeling*, 2. Applications, Water Resources Research, Vol. 13, n-3, pp. 577-586.

PEREIRA, M.F.V., G.C. OLIVERA, C.C.G. COSTA y J. KELMAN. 1984. *Stochastic streamflow models for hydroelectric systems*. Water Resources Research. Vol. 20 n-3, pp. 379-390. Marzo.

QUIMPO, R.G. 1967. *Stochastic model of daily river flow sequences*. Hydrology Paper n-18, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

RICHARDSON, C.W. 1981. *Stochastic simulation of daily precipitation, temperature, and solar radiation*. Water Resources Research, Vol. 17, n-1, pp. 182-190.

ROESNER, L.A. y V. YEVEVICH. 1966. *Mathematical models for time series of monthly precipitation and monthly runoff*. Hydrology Papers n-15. Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

SALAS, J.D., J.W. DELLEUR, V. YEVEVICH y W.L. LANE. 1980. *Applied modeling of hydrologic time series*. Water Resources Publications, Littleton, Colorado.

THOMAS, H.A. JR. y M.B. FIERING. 1963. *The nature of the storage yield functions*. In *operations research in water quality management*, Chapter 2, Harvard University Water Program, Cambridge, Massachusetts.

TONG, H. 1983. *Threshold models in nonlinear time series analysis*. Lecture Notes in Statistics, 21, Springer-Verlag, New York.

WEISS, G. 1975. *Time-reversibility of linear stochastic processes*. J. Appl. Prob. Vol. 12, pp. 831-836.

WEISS, G. 1977. *Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data*. Water Resources Research, Vol. 13, n-1.

YEVEVICH, V. 1963. *Fluctuation of wet and dry years. Research data assembly and mathematical models*. Hydrology Papers n-1, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

YEVEVICH, V. 1972. *Stochastic processes in hydrology*. Water resources publications. Littleton, Colorado.

YEVEVICH, V. 1984. *Structure of daily hydrologic series*. Water Resources Publications, Littleton, Colorado.