MECÁNICA RACIONAL

PRIMERA PARTE

DEL PUNTO MATERIAL

CAPÍTULO VII

MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL SOMETIDO A LIGAZONES

Se dice, en jeneral, que un punto material es sometido a ligazones cuando su movimiento, en el espacio, no obedece libremente a la accion de las fuerzas.

Se concibe que el efecto de estas ligazones será equivalente, a cada instante, a la accion de cierta fuerza, llamada *fuerza de ligazon.* Esta será determinada por la condicion que el punto móvil, sometido a la accion de la fuerza de ligazon i de las fuerzas que obran directamente sobre él, tome un movimiento compatible con la ligazon considerada.

Las ligazones pueden espresarse analíticamente por medio de ciertas ecuaciones de condicion entre las coordenadas del punto móvil. Las mas sencillas son las que no contienen esplícitamente el tiempo; el número de éstas debe ser entónces menor que tres, puesto que tres ecuaciones, entre las tres coordenadas de un punto, fijan completamente su posicion en el espacio.

Dos ecuaciones de condicion, en las cuales el tiempo no figura esplícitamente, fijan la trayectoria del punto i una sola indica que el punto debe moverse sobre una superficie determinada.

Estudiaremos estos dos casos.

Sean: m la masa del punto material; F la fuerza que, en el momento t, obra directamente sobre él i F_1 la fuerza que, en este momento, representa el efecto de las ligazones; x, y, z las coordenadas del punto respecto a un sistema fijo de tres ejes rectangulares; X, Y, Z las tres proyecciones de F i X_1 Y_1 Z las de F_1. Las coordenadas del punto deben satisfacer a las ecuaciones

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_1 \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_1 \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_1 \end{aligned} \right.$$

Son tres ecuaciones entre seis incógnitas: las tres coordenadas x, y, z i las tres proyecciones X_1 Y_1 Z_1 de la fuerza de ligazon.

I. *Si el punto material debe moverse sobre una curva determinada*, sus tres coordenadas satisfacen a dos ecuaciones de condicion; éstas, con las ecuaciones (1), forman un sistema de cinco ecuaciones entre seis incógnitas; falta por consiguiente una sola ecuacion para que el problema pueda resolverse. Se admite entónces que la fuerza de ligazon F_1 es normal a la curva que debe describir el punto i se obtiene así la *sexta* ecuacion.

II. *Si el punto material debe moverse sobre una superficie determinada*, sus tres coordenadas satisfacen a una ecuacion de condicion; ésta i las ecuaciones (1) forman entónces un sistema de cuatro ecuaciones entre seis incógnitas; para obtener dos nuevas ecuaciones se admite que la fuerza de ligazon F_1 es normal a la superficie sobre la cual se mueve el punto; se ve que esta condicion equivale precisamente a dos ecuaciones.

En resúmen, en los dos casos, el problema es enteramente definido. Por lo demas, las hipótesis hechas, sobre la direccion de la fuerza de ligazon, son conformes con la observacion, cuando se desprecia el rozamiento del punto sobre la curva o la superficie.

Si un punto material, móvil sobre una curva o una superficie, está sometido solo a la fuerza de ligazon correspondiente, su enerjía cinética queda constante, puesto que la fuerza de ligazon no trabaja durante el movimiento del punto; luego la velocidad del punto queda constante; este resultado es efectivamente conforme con la observacion.

DETERMINACION DE LA FUERZA DE LIGAZON EN EL CASO DEL MOVIMIENTO SOBRE UNA CURVA

Trasformaremos las ecuaciones (1); sea v la velocidad del punto, en el momento t, i s el camino recorrido sobre la curva en el mismo momento; este camino se cuenta desde cierto punto fijo de la curva; se tiene

$$\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{ds}$$

Por consiguiente, segun (1)

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} mv^2\,\frac{d^2x}{ds^2} + m\,\frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{ds} &= X + X_1 \\ mv^2\,\frac{d^2y}{ds^2} + m\,\frac{dv}{dt}\,\frac{dy}{ds} &= Y + Y_1 \\ mv^2\,\frac{d^2z}{ds^2} + m\,\frac{dv}{dt}\,\frac{dz}{ds} &= Z + Z_1 \end{aligned} \right.$$

Elejimos ahora los ejes de tal manera que OX tenga la direccion i el sentido de la velocidad v i OY la direccion i el sentido del vector que une el punto móvil con el centro de curvatura de la trayectoria.

Sea ρ el radio de curvatura de la trayectoria, se tendrá

$$\frac{dx}{ds}=1 \quad \frac{d^2x}{ds^2}=0$$

$$\frac{dy}{ds}=0 \quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{\rho}$$

$$\frac{dz}{ds}=0 \quad \frac{d^2z}{ds^2}=0$$

$$X_1=0$$

Luego las fórmulas (2) se reducen a los siguientes

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{dv}{dt}&=X \\ m\frac{v^2}{\rho}&=Y+Y_1 \\ 0&=Z+Z_1 \end{aligned} \right.$$

La primera de estas ecuaciones fija el movimiento del punto sobre su trayectoria. Esta ecuacion podia escribirse de antemano; en efecto, el punto material puede ser considerado como si estuviera libre i sometido a la accion de las fuerzas simultáneas F i F_1; sea α el ángulo de F con la velocidad. La proyeccion de la resultante de F i F_1 sobre la tanjente a la trayectoria es igual a $F \cos \alpha$, puesto que F_1 es normal a la velocidad; por consiguiente, la fuerza tanjencial tiene por medida $F \cos \alpha$ i se tiene

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos\alpha$$

Es precisamente la primera de las ecuaciones (3).

La fuerza de ligazon F_1 es enteramente determinada; en efecto su proyeccion X_1 sobre la direccion de la tanjente es nula i las otras dos proyecciones Y_1 Z_1 sobre la normal principal i la binormal son determinadas por las dos últimas ecuaciones (3).

Sea F_r la *reaccion* del punto material sobre la curva, esta es igual i de sentido opuesto a F_1, de suerte que si X_r Y_r Z_r son sus tres proyecciones sobre los ejes considerados mas arriba, se tiene

$$(4) \qquad \begin{cases} X_r = 0 \\ Y_r = Y - \dfrac{mv^2}{\rho} \\ Z_r = Z \end{cases}$$

DETERMINACION DE LA FUERZA DE LIGAZON EN EL CASO DEL MOVIMIENTO SOBRE UNA SUPERFICIE

Supondremos ahora que el eje OX sea dirijido, como mas arriba, en la direccion i en el sentido de la velocidad, el eje OY en el plano tanjente a la superficie i el eje OZ segun la normal en el sentido del vector que une el punto móvil con el centro de curvatura de la seccion normal XOZ. Sea ρ el radio de curvatura de la trayectoria; R el radio de curvatura de la seccion normal XOZ; γ el ángulo del plano osculador de la trayectoria con la normal a la superficie, se tiene

$$\rho = R \cos \gamma$$

$$\frac{dx}{ds} = 1 \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = 0 \qquad X_1 = 0$$

$$\frac{dy}{ds} = 0 \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\rho} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{R} \qquad Y_1 = 0$$

$$\frac{dz}{ds} = 0 \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\cos \gamma}{\rho} = \frac{1}{R}$$

Las ecuaciones (2) dan entónces

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= X \\ mv^2\frac{\operatorname{tg}\gamma}{R} &= Y \\ \frac{mv^2}{R} &= Z + Z_1 \end{aligned}\right.$$

Las dos primeras ecuaciones determinan el movimiento del punto i la tercera da el valor de la ligazon, pues las dos componentes X_1, Y_1 son nulas.

Si la componente Y de la fuerza que obra directamente sobre el punto es nula, el ángulo γ queda nulo i, por consiguiente, la trayectoria es una *línea jeodésica* de la superficie.

Sea todavía F_r la reaccion del punto sobre la superficie; las tres componentes, segun los ejes elejidos, serán

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} X_r &= 0 \\ Y_r &= 0 \\ Z_r &= Z - \frac{mv^2}{R} \end{aligned}\right.$$

Si el punto se mueve sobre un plano, R es infinito i

$$Z_r = Z$$

PÉNDULO SIMPLE

El péndulo simple se compone de un punto material pesado, suspendido a la estremidad de un hilo, cuya otra estremidad es fija. Se supone el hilo inestensible i se desprecia su peso.

TEOREMA.—*Si, a un momento dado, la velocidad del punto es contenida en el plano vertical que pasa por el hilo, el movimiento del punto se efectúa indefinidamente en el mismo plano vertical.*

En efecto, en el momento considerado, la fuerza que obra sobre el punto material es la resultante del peso del punto i de la accion del hilo, luego esta fuerza está contenida en el plano vertical que contiene la velocidad; la velocidad, en el momento infinitamente próximo, estará, por consiguiente, contenida en el mismo plano i así en seguida. Lo que demuestra el teorema.

De ahí se deduce que si, a un momento dado, la velocidad del punto material es nula, su movimiento se efectúa forzosamente en el plano vertical que, en este momento, pasa por la direccion del hilo. Tambien se deduce que si, a un momento dado, el punto móvil se encuentra sobre la vertical del punto de suspension, el movimiento se efectúa en el plano vertical que, en este momento, pasa por la direccion de la velocidad.

Estudiaremos primero el caso sencillo del movimiento plano. El punto material móvil M (fig. 20) describe entónces una circunferencia i su movimiento satisface a la ecuacion

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos\alpha$$

Sea l la lonjitud del péndulo, θ el ángulo del hilo con la vertical en el momento t, se tiene

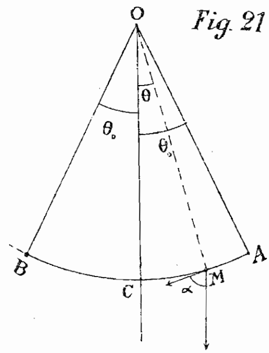


Fig. 21

$$F=mg$$

$$\cos\alpha=\operatorname{sen}\theta$$

$$v=-l\frac{d\theta}{dt}$$

Luego

$$-ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=mg\operatorname{sen}\theta$$

O bien

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta=0 \qquad (7)$$

Esta ecuacion diferencial espresa θ en funcion de t i, por consiguiente, define el movimiento del péndulo. Para hacer la integracion multipliquemos por $\frac{d\theta}{dt}$, i pongamos

$$\frac{g}{l}=K^2 \qquad (8)$$

tendremos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\frac{d\theta}{dt}+K^2\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\theta}{dt}=0$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - K^2 \cos\theta = \text{const.}$$

Supongamos que, en el momento inicial, la estremidad del péndulo estaba en A, sin velocidad inicial, i que θ_0 es el ángulo de OA con la vertical; en este momento $\frac{d\theta}{dt}$ es nulo i se tiene

$$-K^2 \cos\theta_0 = \text{const.}$$

Luego

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2K^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Esta fórmula muestra ya que $\cos\theta - \cos\theta_0$ debe quedar positivo; por consiguiente, el péndulo debe oscilar entre la posicion inicial OA i la posicion simétrica OB; la velocidad del punto material es nula en A, pasa por un máximo en el punto C, situado sobre la vertical del punto de suspension i disminuye en seguida hácia cero en el punto B, simétrico de A.

De la ecuacion precedente se deduce ahora

$$K\,dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

I por consiguiente

$$(9) \qquad Kt + \text{Const.} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

El segundo miembro es una funcion elíptica.

Supongamos que el ángulo θ_0 sea pequeño i despreciemos θ_0^3, se deberá tambien despreciar θ^3 que es mas pequeño; entónces se podrá reemplazar $2(\cos\theta - \cos\theta_0)$ por $\theta_0^2 - \theta^2$ i se tendrá

$$Kt + \text{Const.} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \int \frac{d\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2}} = \text{arc}\cos\frac{\theta}{\theta_0}$$

O bien

$$\theta=\theta_0 \cos (K t+\text{Const.})$$

Si se cuenta el tiempo desde el momento en que $\theta=\theta_0$ la constante de integracion es nula, i se tiene simplemente

$$\theta=\theta_0 \cos K t$$

La duracion T de una oscilacion es el tiempo que emplea el péndulo para pasar de la posicion inicial OA a la posicion simétrica OB, en la cual $\theta=-\theta_0$; por consiguiente T será determinado por la ecuacion

$$-\theta_0=\theta_0 \cos KT$$

O bien

$$\cos KT=-1$$

$$KT=\pi$$

Si se reemplaza K por su valor (8) se tiene

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{10}$$

Este resultado es solo aproximado puesto que hemos despreciado θ_0^3.

DETERMINACION DEL VALOR EXACTO DE T.

Para calcular el valor exacto de T, volvemos a la ecuacion (9); si, en el segundo miembro, θ varia desde θ_0 hasta cero el valor absoluto de la integral definida será igual a $\frac{KT}{2}$, por consiguiente

$$KT=2\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}$$

Para calcular la integral definida emplearemos un desarrollo en serie, se puede escribir

$$KT=\int_{0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Sea

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = x \operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2}$$

Se tendrá

$$KT=\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2}}}$$

Para simplificar, pondremos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} = \epsilon$$

Entónces

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2}}} = (1-\epsilon x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon x^2 + \frac{1.3}{2.4}\epsilon^2 x^4 + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{1.3\ 5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n}\epsilon^{n} x^{2n} + \ldots.$$

Sustituyendo este desarrollo en la integral definida se obtiene

$$(11) \qquad KT = 2\,\Sigma\,\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\epsilon^{n}\int_{0}^{1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

En el *Tratado de Cálculo Infinitesimal* (1), se han establecido las fórmulas

$$I_{m} = \int \frac{x^{m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$m\,I_{m} = (m-1)\,I_{m-2} - x^{m-1}\sqrt{1-x^2}$$

(1) Primera parte, páj. 37.

En el caso actual, podremos escribir

$$J_{2n} = \int_0^1 \frac{x^{2n}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2n\, J_{2n} = (2n-1)\, J_{2n-2}$$

Esta última fórmula da finalmente

$$J_{2n} = \frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2.4.6.\dots 2n} J_0$$

I, como

$$J_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}$$

se tiene

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2.4.6.\dots 2n} \quad \frac{\pi}{2}$$

La fórmula (11) se trasforma, entónces, en la siguiente

$$KT = \pi \Sigma \left[\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots \quad 2n} \right]^2 \epsilon^n$$

I el valor exacto de T es

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right\}$$

Se ve que el tiempo de la oscilacion depende del ángulo θ_0 i aumenta a medida que θ_0 aumenta.

Si se desprecia $\theta_0{}^4$, se obtiene la fórmula conocida

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0{}^2}{16}\right)$$

TENSION DEL HILO

La tension del hilo es la reaccion del punto material sobre el hilo, su direccion es evidentemente la del hilo; sea N su magnitud, contada en el sentido que va desde el punto de suspension hácia el punto material. El valor de N se deducirá de las fórmulas (4); en éstas Z_r es nulo e Y_r es la proyeccion de la reaccion sobre un eje perpendicular a la velocidad; ademas este eje de proyeccion es dirijido hácia el centro de curvatura de la trayectoria, luego

$$N = -Y_r$$

En las mismas formulas (4), Y es la proyeccion de mg sobre el eje considerado mas arriba, luego

$$Y = -mg\cos\theta$$

Por fin, el radio de curvatura ρ es igual a l, luego

$$N = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l}$$

Se ve que la tension N va aumentando a medida que el hilo se aproxima de la vertical.

PÉNDULO CICLOIDAL

El estudio del péndulo simple nos ha mostrado que el tiempo de la oscilacion o de la media oscilacion, es decir, el tiempo que demora el móvil para ir sin velocidad inicial desde A hácia C (fig. 21) depende del ángulo θ_0, es decir, de la lonjitud del arco AC.

Se puede buscar cuál es la forma de la curva plana AC, tal que un punto pesado, móvil sobre esta curva, emplee siempre el mismo tiempo para ir, sin velocidad inicial, desde un punto cualquiera M de la curva hácia el punto C.

Tomemos como oríjen (fig, 22) el punto C i sea CX un eje horizontal, situado en el plano de la curva buscada; cuando el punto móvil habrá venido en cierto punto de ordenada y su velocidad será tal que

$$v^2 = 2g\,(h-y)$$

es una consecuencia directa del teorema de la fuerza viva. De aquí se deduce, si s es el arco contado desde el oríjen

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g\,(h-y)}$$

Luego el tiempo t que demora el móvil para ir desde A hasta C es

$$t = -\int_{y=h}^{y=0} \frac{ds}{\sqrt{2g\,(h-y)}}$$

Sea

$$s = \phi\,(y)$$

la ecuacion de la curva buscada, tendremos

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\phi'\,(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}$$

Pongamos

$$y = h\,u$$

Entónces

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{\phi'\,(hu)\,\sqrt{hu}\;du}{\sqrt{u\,(1-u)}}$$

La integral definida debe ser independiente de h; como los límites no dependen de h se ve que el producto

$$\phi'\,(hu)\;\sqrt{hu}$$

debe ser independiente de h o, lo que es lo mismo

$$\phi'\,(y)\,\sqrt{y}$$

debe ser independiente de y, luego se debe tener

$$\phi'(y)\sqrt{y}=K$$

$$\phi'(y)=\frac{K}{\sqrt{y}}$$

I por consiguiente

$$\phi(y)=s=2K\sqrt{y}$$

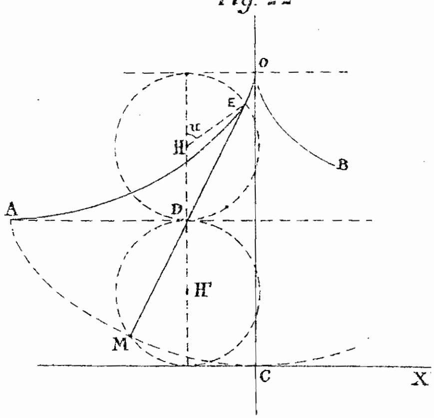
Así la ecuacion de la curva buscada es

$$s=2K\sqrt{y}$$

es una cicloide tanjente en C al eje CX (1).

Para hacer describir una cicloide al punto material pesado M, se considera una cicloide fija AOB a base horizontal (fig. 22) i un hilo inestensible, fijado en el punto de retroceso O; el punto material M es suspendido a la estremidad de este hilo, a una distancia de O igual a dos veces el diámetro del círculo jenerador; este punto describe una cicloide si, durante el movimiento, el hilo se apoya siempre sobre la cicloide AOB.

Fig. 22



Sea, en efecto, E el punto de contacto del hilo con la cicloide i r el radio del círculo jenerador; el arco AEO tiene una lonjitud igual a $4r$, es decir, la misma lonjitud que el hilo, luego la parte recta EM tiene la misma lonjitud que el arco AE.

(1) *Tratado de cálculo infinitesimal.* Primera parte, páj. 67 i 68.

Sea H el centro del círculo jenerador que pasa por E i u el ángulo de HE con la vertical, se sabe que el arco AE tiene por lonjitud $4\,r\cos\frac{u}{2}$ (1). Por otra parte, la tanjente en E a la cicloide pasa por el punto D, estremidad del diámetro vertical del círculo jenerador i se tiene, en la figura 22.

$$ED = 2\,r\cos\frac{u}{2}$$

Así ED es igual a la mitad del arco AE o a la mitad de EM. Sea H' el centro de un círculo, simétrico del primero respecto al punto D, el punto M estará sobre la circunferencia de este círculo i el arco MD es igual a AD, como se verifica directamente sobre la figura. Luego el punto M describe una cicloide igual a la primera.

La idea del péndulo cicloidal es debida a Huygens, pero la dificultad de su construccion no permite usarlo en la práctica.

PÉNDULO CÓNICO

Cuando la velocidad inicial de la estremidad del péndulo simple tiene una direccion cualquiera, no situada en el plano vertical del hilo, el movimiento del péndulo no se efectúa en un plano vertical i el hilo describe un cono.

Consideremos un sistema fijo de tres ejes rectangulares; elejimos el oríjen en el punto de suspension del péndulo i el eje OZ vertical i dirijido hácia abajo; sean x, y, z las coordenadas de la estremidad móvil, i N la tension del hilo; se tendrán las siguientes ecuaciones

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -N\frac{x}{l}\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -N\frac{y}{l}\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -N\frac{z}{l}+mg \end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad x^2+y^2+z^2=l^2$$

(1) *Tratado de cálculo infinitesimal.* Primera parte, páj 67 i 68.

Son cuatro ecuaciones entre las cuatro incógnitas x, y, z, N. De las tres primeras se deducen las siguientes

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2 z}{dt^2} = g \frac{dz}{dt}$$

Éstas se integran inmediatamente i se tiene

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C \\ & \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2gz + C \end{aligned} \right.$$

La primera de las ecuaciones (14) muestra que la proyeccion, sobre el plano horizontal XOY, del área descrita por el hilo varia proporcionalmente al tiempo; este resultado podia preveerse, puesto que la proyeccion de la fuerza sobre el plano XOY pasa siempre por el punto O.

La segunda ecuacion (14) es una consecuencia del teorema de las fuerzas vivas; el primer miembro es, en efecto, igual al cuadrado de la velocidad del móvil.

Las dos ecuaciones (14) i la ecuacion (13) forman un sistema de tres ecuaciones entre las tres incógnitas x, y, z.

Sean θ el ángulo del hilo con la vertical i ϕ el ángulo del plano vertical del hilo con el plano XOZ, se tendrá

$$x = l \operatorname{sen} \theta \cos \phi$$

$$y = l \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$z = l \cos \theta$$

I las ecuaciones (14) se trasforman en las siguientes

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\phi}{dt} = C \\ & l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 2g\, l \cos \theta + C' \end{aligned} \right.$$

Son dos ecuaciones entre las incógnitas ϕ i θ; la eliminacion de ϕ es evidente i se obtiene finalmente una relacion en la cual θ se espresa bajo la forma de una funcion elíptica de t. Conociendo θ en funcion de t, la primera de las ecuaciones (15) dará el valor de ϕ. En resúmen el problema es resuelto teóricamente.

CONDICION PARA QUE EL PÉNDULO DESCRIBA UN CONO DE REVOLUCION AL REDEDOR DE LA VERTICAL

Las ecuaciones (15) muestran que, en este caso, el ángulo ϕ varia proporcionalmente al tiempo i que, por consiguiente, la velocidad del punto material es constante. Esto se puede averiguar con las fórmulas (12); hagamos en ellas

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

i supongamos r i z constantes, entónces

$$\frac{dx}{dt} = -y\frac{d\phi}{dt} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d^2\phi}{dt^2} - x\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{d\phi}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d^2\phi}{dt^2} - y\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dz}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Llevando estos valores en (12) se obtiene

$$-my\frac{d^2\phi}{dt^2} - mx\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = -N\frac{x}{l}$$

$$+mx\frac{d^2\phi}{dt^2} - my\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = -N\frac{y}{l}$$

$$0 = -N\frac{z}{l} + mg$$

Las dos primeras dan

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0, \quad \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{N}{m}\,\frac{1}{l}$$

I la última

$$-z\left(\frac{d^2\phi}{dt}\right)^2+g=0$$

Luego

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=\frac{g}{z}=\frac{g}{l\cos\theta}$$

Tal es la condicion que debe llenar la velocidad angular $\frac{d\phi}{dt}$ para que el péndulo describa un cono de revolucion.

El tiempo T de una revolucion completa será en este caso.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

CASO EN QUE LAS OSCILACIONES SON MUI PEQUEÑAS

En este caso, los coordenadas x e y son mui pequeñas, respecto a la lonjitud l del péndulo; despreciaremos los cuadrados de las cantidades $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$; entónces, al mismo órden de aproximacion, se deberá considerar z como una constante, igual a l en efecto

$$z=l\sqrt{1-\frac{x}{l^2}-\frac{y^2}{l^2}}$$

La tercera de las ecuaciones (12) da entónces

$$N=mg$$

I las dos primeras

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{l}y=0$$

Sea, como mas arriba,

$$\frac{g}{l}=K^2$$

Las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales son

$$x=A \cos Kt+B \operatorname{sen} Kt$$
$$y=A' \cos Kt+B' \operatorname{sen} Kt$$

Estas dos ecuaciones dan la proyeccion, sobre el plano horizontal XOY, del movimiento de la estremidad del péndulo. La eliminacion de t de la siguiente trayectoria

$$(Ay-A'x)^2+(By-B'x)^2=(AB'-BA')^2$$

Es la ecuacion de una elipse referida a su centro.

Las coordenadas x, y vuelven periódicamente a tomar los mismos valores cuando Kt varia de 2π, luego si T es el tiempo de una oscilacion completa, se tendrá

$$KT=2\pi$$

O bien

$$T=\frac{2\pi}{K}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

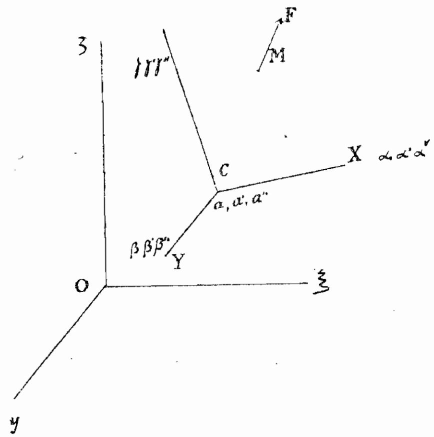
CAPÍTULO VIII

DEL MOVIMIENTO RELATIVO.—APLICACION AL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS A LA SUPERFICIE DE LA TIERRA.—PÉNDULO DE FOUCAULT

Cuando se refieren las posiciones sucesivas de un punto material a un sistema de comparacion, móvil en el espacio, el movimiento del punto, respecto a este sistema, se llama *movimiento relativo.* Si el sistema de comparacion es animado de una traslacion recta i uniforme, las fuerzas, ligadas a este sistema, obran sobre el punto, como si el sistema de comparacion estuviera fijo en el espacio. Es un resultado de la observacion i lo hemos admitido como principio fundamental.

No pasa lo mismo cuando el sistema de comparacion es animado de un movimiento cualquiera. Para demostrarlo, consideremos (fig. 23) un sistema fijo de tres ejes rectangulares $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ i otro sistema móvil $CXYZ$; sea M la posicion del punto material, en el momento t; ξ, η, ζ sus coordenadas respecto al sistema fijo i x, y, z sus coordenadas respecto al sistema móvil.

Fig. 23



Sean tambien, respecto al sistema fijo $a, a'\, a''$ las coordenadas del punto C, oríjen del sistema de comparacion móvil; α, α' α'' los cosenos directores de CX; β, β', β'' los de CY i γ, γ' γ'' los de CZ. Estas doce cantidades son variables con el tiempo i su variacion define el movimiento de arrastre del sistema de comparacion.

Sean ahora X, Y, Z las proyecciones, sobre los ejes móviles, de la fuerza F que, en el momento t, obra sobre el punto M. La proyeccion de F sobre el eje fijo $O\xi$ será

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

Respecto de este eje se tendrá, si m es la masa del punto M

$$(1) \qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \alpha X + \beta\, Y + \gamma Z$$

Ahora

$$\xi = a + \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{da}{dt} + x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\beta}{dt} + z\frac{d\gamma}{dt} + \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \gamma\frac{dz}{dt}$$

$$(2) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + x\frac{d^2\alpha}{dt^2} + y\frac{d^2\beta}{dt^2} + z\frac{d^2\gamma}{dt^2} +$$

$$2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\right) + \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{d^2z}{dt^2}$$

Si, en la ecuacion (1) se reemplaza $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ por su valor (2) se obtiene una ecuacion en la cual figuran: las coordenadas relativas x, y, z; las proyecciones de la fuerza sobre los ejes móviles i las doce cantidades que fijan la posicion del sistema de comparacion. Se obtendrian dos ecuaciones parecidas, respecto a los dos otros ejes de coordenadas i el conjunto de las tres ecuaciones permitiria calcular el movimiento relativo del punto.

El sistema fijo $O\xi\eta\zeta$ se ha elejido arbitrariamente; se puede, por consiguiente, suponer que su posicion se confunde con la del sistema de comparacion, en el momento t; entónces

$$\alpha = 1, \ \beta = 0, \ \gamma = 0$$

Sea tambien

$$(3) \quad \begin{cases} -m\left(\frac{d^2a}{dt^2} + x\frac{d^2\alpha}{dt^2} + y\frac{d^2\beta}{dt^2} + z\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) = X_{\text{ar}} \\ -2m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\right) = X_{\text{c}} \end{cases}$$

Tendremos, segun (1) i (2) i haciendo $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

$$-X_{\text{ar}} - X_{\text{c}} + m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

O bien

$$(4) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_{\text{ar}} + X_{\text{c}}$$

Respecto a los otros dos ejes tendríamos las ecuaciones análogas

$$(4)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_{ar} + Y_c \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_{ar} + Z_c \end{cases}$$

Los valores de Y_{ar}, Z_{ar}, Y_c, Z_e se obtendrian por medio de fórmulas análogas a (3).

Estas fórmulas muestran que X_{ar} i X_c tienen las dimensiones de una fuerza. Sea F_{ar}, la fuerza que tiene por proyecciones X_{ar}, Y_{ar}, Z_{ar} i F_c la fuerza que tiene por proyecciones X_c, Y_c, Z_c la fuerza F_{ar} se llama *fuerza de inercia de arrastre* i F_c la *fuerza centrífuga compuesta.*

Segun las ecuaciones (4) el punto material, sometido a la fuerza F, se mueve, respecto al sistema móvil, como si estuviera sometido ademas a las dos fuerzas F_{ar} i F_c. Estas se llaman, por esta razon, *fuerzas aparentes.*

Las ecuaciones (3) i las análogas, respecto a los otros dos ejes, muestran que las fuerzas aparentes son nulas cuando el sistema de comparacion es animado de una traslacion recta i uniforme, lo que debia suceder, en efecto.

La fuerza centrífuga compuesta F_c es un indicio no depende del movimiento del oríjen móvil C, sino del movimiento de rotacion de los ejes al rededor de C, considerado como fijo. De suerte que si estos ejes conservan una direccion invariable, es decir si el movimiento de arrastre es una traslacion, la fuerza centrífuga compuesta es nula i la fuerza de inercia de arrastre se reduce a

$$X_{ar} = -m\frac{d^2a}{dt^2}$$

$$Y_{ar} = -m\frac{d^2a'}{dt^2}$$

$$Z_{ar} = -m\frac{d^2a''}{dt^2}$$

La fuerza centrífuga compuesta F_c es nula tambien segun

(3) cuando el punto M está en equilibrio relativo puesto que en este caso $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ son nulos.

EL MOVIMIENTO DE ARRASTRE ES UNA ROTACION DE VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE AL REDEDOR DE UN EJE FIJO.

Supondremos (fig. 16) que $O\zeta$ sea el eje fijo de rotacion, podremos elejir el sistema de comparacion de tal manera que el oríjen C sea confundido con O i CZ con $O\zeta$, sea entónces ϕ el ángulo que hacen, en el momento t, los planos $\zeta O\xi$ i ZCX i ω la velocidad angular constante de rotacion. Tendremos en este caso

$$\begin{array}{llll} a=0 & \alpha=\cos\phi & \beta=-\operatorname{sen}\phi & \gamma=0 \\ a'=0 & \alpha'=\operatorname{sen}\phi & \beta'=\cos\phi & \gamma'=0 \\ a''=0 & \alpha''=0 & \beta''=0 & \gamma''=1 \end{array}$$

Las derivadas de a, a' a'', α'', β'', γ, γ' γ'' serán nulas para todos los valores de ϕ i se tendrá ademas

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\omega\operatorname{sen}\phi \qquad \frac{d\beta}{dt}=-\omega\cos\phi$$

$$\frac{d\alpha'}{dt}=-\omega\cos\phi \qquad \frac{d\beta'}{dt}=-\omega\operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\omega^2\cos\phi \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2}=+\omega^2\operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{d^2\alpha'}{dt^2}=-\omega^2\operatorname{sen}\phi \qquad \frac{d^2\beta'}{dt^2}=-\omega^2\cos\phi$$

Si, como mas arriba, se supone que, en el momento t, los ejes fijos coinciden con los ejes móviles, el ángulo ϕ es nulo i se tiene simplemente

$$\frac{d\alpha}{dt}=0 \qquad \frac{d\beta}{dt}=-\omega$$

$$\frac{d\alpha'}{dt}=\omega \qquad \frac{d\beta'}{dt}=0$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\omega^2 \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2\alpha'}{dtt}=0 \qquad \frac{d^2\beta'}{dt^2}=-\omega^2$$

Segun esto

$$X_{ar} = m\,\omega^2 x \qquad X_c = \quad 2m\,\omega\,\frac{dy}{dt}$$

$$Y_{ar} = m\,\omega^2 y \qquad Y_c = -2m\,\omega\,\frac{dx}{dt}$$

$$Z_{ar} = 0 \qquad Z_c = 0$$

Las ecuaciones del movimiento relativo son por consiguiente segun (4)

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + m\,\omega^2\,x + 2\,m\,\omega\,\frac{dy}{dt} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + m\,\omega^2\,y - 2\,m\,\omega\,\frac{dx}{dt} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned} \right.$$

Si el punto material está en equilibrio relativo, las coordenadas x, y, z son constantes i las ecuaciones (5) dan

$$0 = X + m\omega^2 x$$
$$0 = Y + m\omega^2 y$$
$$0 = Z$$

Sea r la distancia del punto al eje de rotacion, la fuerza que tiene por proyecciones X, Y, Z es dirijida normalmente desde el punto hácia el eje de rotacion i su intensidad es $m\omega^2 r$.

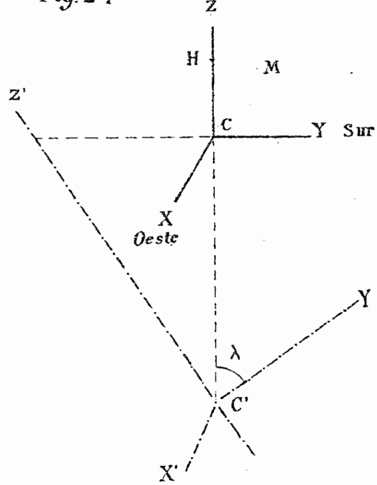
En su movimiento absoluto, el punto describe entónces una circunferencia de radio r con un movimiento uniforme i se ve que, para esto, es necesario que sea sometido a la fuerza $m\,\omega^2 r$.

Este resultado podia deducirse de la consideracion de la fuerza centrípeta; en efecto, a cada instante, un punto material móvil puede ser considerado como sometido a dos fuerzas: la fuerza tanjencial $m\frac{dv}{dt}$ i la fuerza centrípeta $\frac{mv^2}{\rho}$; la primera es nula en el caso considerado i el valor de la segunda es igual precisamente a $m\omega^2 r$ puesto que $v = \omega r$ i $\rho = r$.

APLICACION AL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS EN LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

Sea (fig. 24) C un punto situado a la superficie de la tierra, en el hemisferio norte, i M un punto material. Se refiere la posicion del punto M a un sistema de tres ejes rectangulares: CZ, dirijido segun la vertical, hácia el zenit, CY en el meridiano del punto C, hácia el sur i CX hácia el oeste.

Fig. 24



Como la tierra es un cuerpo de revolucion, la prolongacion de CZ encontrará el eje de rotacion de la tierra en un punto C'; en este punto, consideremos otro sistema de tres ejes rectangulares ligados a la tierra: $C'Z'$ dirijido hácia el polo norte, $C'X'$ paralelo a CX i de mismo sentido, $C'Y'$ en el meridiano del punto C en un sentido tal que su orientacion respecto a $C'X'$ sea la misma orientacion de CY respecto a CX.

El ángulo $CC'Y'$ sea la latitud λ del lugar C.

Sean x, y, z las coordenadas de M respecto al sistema $CXYZ$ i X, Y, Z las proporciones sobre los mismos ejes de la fuerza F que obra directamente sobre M; x', y', z' i X', Y', Z' los elementos análogos respecto al sistema $C'X'Y'Z'$; ω la velocidad de rotacion de la tierra.

Las coordenadas x', y', z' i las proyecciones X', Y', Z' satisfacen a las ecuaciones (5) en los cuales se acentúan las letras; se tiene, por consiguiente,

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=X'+m\omega^2x'+2\,m\omega\frac{dy'}{dt}$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2}=Y'+m\omega^2y'-2\,m\omega\frac{dx'}{dt}$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2}=Z'$$

Sea ρ la distancia CC', se tienen las siguientes fórmulas de trasformacion

$$x=x' \qquad X=X'$$

$$y=y'\operatorname{sen}\lambda-z'\cos\lambda \qquad Z=Y'\operatorname{sen}\lambda-Z'\cos\lambda$$

$$z=-\rho+y'\cos\lambda+z'\operatorname{sen}\lambda \qquad Z=Y'\cos\lambda+Z'\operatorname{sen}\lambda$$

De ahí se deduce

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&m\frac{d^2x}{dt^2}=X+m\omega^2x+2\,m\omega\left(\frac{dy}{dt}\operatorname{sen}\lambda+\frac{dz}{dt}\cos\lambda\right)\\
&m\frac{dy_2}{dt^2}=Y+m\omega^2\operatorname{sen}\lambda\,[y\operatorname{sen}\lambda+(z+\rho)\cos\lambda]-2\,m\omega\operatorname{sen}\lambda\frac{dr}{dt}\\
&m\frac{d^2z}{dt^1}=Z+m\omega^2\cos\lambda\,[y\operatorname{sen}\lambda+(z+\rho)\cos\lambda)]-2\,m\omega\cos\lambda\,\frac{dz}{dt}
\end{aligned}\right.$$

La fuerza F que obra directamente sobre el punto material se puede descomponer en dos: la atraccion F_a, ejercitada por la tierra misma sobre el punto, i la fuerza F que, a la superficie de la tierra, obra sobre el punto.

Como la tierra es sensiblemente simétrica al rededor del eje polar, la fuerza F_a será contenida en el plano meridiano del punto M, ademas, esta fuerza será la misma que la que obraria sobre un punto de misma masa situado en C, pues la distancia MC es siempre mui pequeña, respecto a las dimensiones de la tierra. Sean entónces X_a, Z_a las componentes de F_a respecto a CY i CZ, las ecuaciones (6) se escribirán así

$$(7)\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X_t + m\omega^2 x + 2\,m\omega\left(\frac{dy}{dt}\operatorname{sen}\lambda + \frac{dz}{dt}\cos\lambda\right) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y_t + Y_a + m\omega^2 \operatorname{sen}\lambda\,[y \operatorname{sen}\lambda + z + \rho)\cos\lambda] - 2\,m\omega\cos\lambda\frac{dx}{dt} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z_t + Z_a + m\omega^2 \cos\lambda\,[y \operatorname{sen}\lambda + (z+\rho)\cos\lambda] - 2\,m\omega\cos\lambda\frac{dx}{dt} \end{aligned}\right.$$

DESVIACION DE LA VERTICAL

Segun la eleccion misma de los ejes, la aceleracion g de la gravedad, en el lugar C de la tierra, tiene por direccion CZ; de tal manera que un punto material, de masa m, sometido en C a una fuerza vertical mg, dirijida desde C hácia Z, debe quedar en equilibrio. Las fórmulas (7) deben, por consiguiente, ser satisfechas cuando se supone en ellas x, y, z constantes i nulos i i $X_t = 0$, $Y_t = 0$, $Z_t = mg$. La primera es satisfecha i las dos otras dan

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= Y_a + m\omega^2\,\rho \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda \\ 0 &= mg + Z_a + m\omega^2\,\rho\cos^2\lambda \end{aligned}\right.$$

Estas dos ecuaciones definen la atraccion F_a de la tierra cuando se conoce g i recíprocamente permiten calcular g cuando se conoce F_a. Sea ϵ el ángulo agudo que hace F_a con CZ; hagamos

$$F_a = m\,G$$

tendremos

$$Y_a = -m\,G \operatorname{sen}\epsilon$$
$$Z_a = -m\,G\cos\epsilon$$

I, por consiguiente

$$G \operatorname{sen}\epsilon = \omega^2\,\rho \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda$$
$$G\cos\epsilon = g + \omega^2\,\rho\cos^2\lambda$$

Como lo hemos indicado mas arriba, (cap. II) g es igual a $9^m,8$ mas o ménos; se tiene, por otra parte

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}$$

$$2\pi\rho = 40.000,000 \text{ metros}$$

luego

$$\omega^2\rho = 0^m,0339$$

Segun esto, la razon $\frac{\omega^2\rho}{g}$, es igual a $\frac{1}{289}$ mas o ménos; es una pequeña cantidad; si despreciamos su cuadrado, podremos escribir simplemente

$$G = g + \omega^2\rho\cos^2\lambda$$

$$\epsilon = \frac{\omega^2\rho}{2g}\operatorname{sen} 2\lambda$$

Si la tierra fuera una esfera homojénea la atraccion F_a o la aceleracion correspondiente G pasaria por el centro de esta esfera i seria constante en todos los puntos, la aceleracion efectiva de la gravedad seria entónces, en un punto de latitud λ,

$$g = G - \omega^2\rho\cos^2\lambda = G\left(1 - \frac{\omega^2\rho}{G}\cos^2\lambda\right)$$

Se ve que el efecto de la rotacion es de disminuir la atraccion ejercitada por la tierra sobre los cuerpos situados en su superficie. Como el valor de $\frac{\omega^2\rho}{G}$ es $\frac{1}{289}$ o $\frac{1}{17^2}$; se ve que una velocidad de rotacion 17 veces mas grande anularia la atraccion que la tierra ejercita sobre los puntos situados en el ecuador; entónces, estos puntos no tendrian peso ninguno en esa rejion. Una velocidad angular mayor todavía haria que en el ecuador los cuerpos se alejarian de la tierra.

El ángulo ϵ que hace la direccion de la atraccion con la vertical se llama *desviacion de la vertical;* esta desviacion es un efecto de la rotacion de la tierra. Segun el valor obtenido mas arriba, se ve que ϵ se anula en los polos i en el ecuador, su valor máximo corresponde a los puntos de latitud $\pm 45^\circ$ i este valor máximo llega a $6'$ mas o ménos.

La tierra no es una esfera homojénea i su forma es precisamente la que hubiera tomado una masa fluida sometida a la rotacion ω; esta forma debe ser tal que, en cada punto de la superficie líquida, la normal sea dirijida segun la gravedad efectiva g, como se demostrará mas tarde.

Así la vertical en un punto tiene misma direccion que la normal a la superficie de la tierra, en este punto, i la atraccion ejercitada por la tierra en uno de sus puntos es la resultante de una atraccion efectiva F_a i de la fuerza de inercia de arrastre $m\omega^2\rho$. La resultante tiene la direccion de la vertical i hace con F_a un ángulo igual a ϵ.

DESVIACION DE LOS CUERPOS HÁCIA EL ESTE

Si en las ecuaciones (7) se reemplazan Y_a, Z_a por sus valores (8) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_t + m\omega^2 x + 2m\omega\left(\frac{dy}{dt}\operatorname{sen}\lambda + \frac{dz}{dt}\cos\lambda\right)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y_t + m\omega^2 \operatorname{sen}\lambda\,(y\operatorname{sen}\lambda + z\cos\lambda) - 2\,m\omega\operatorname{sen}\lambda\,\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z_t - mg + m\omega^2\cos\lambda(y\operatorname{sen}\lambda + z\cos\lambda) - 2\,m\cos\lambda\frac{dy}{dt}$$

Hemos visto que $\omega^2\rho$ es mui pequeño; *a fortiori* las espresiones ω^2x, ω^2y, ω^2z serán insensibles, pues x, y, x son siempre mui pequeños respecto a ρ; se escribirá entónces simplemente

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X_t + 2\,m\omega\left(\frac{dy}{dt}\operatorname{sen}\lambda + \frac{dz}{dt}\cos\lambda\right)\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y_t - 2\,m\omega\operatorname{sen}\lambda\,\frac{dx}{dt}\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z_t - mg - 2\,m\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}\end{aligned}\right.$$

Supongamos que el punto material M caiga, sin velocidad inicial, desde cierto punto H del eje CZ; busquemos su trayectoria. Haremos en (9) $X_t = Y_t = Z_t = 0$. La integracion de las ecuaciones así simplificadas dará inmediatamente

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{dx}{dt} &= 2\,m\omega\,(y \operatorname{sen}\lambda + z\cos\lambda) + C_1 \\ m\frac{dy}{dt} &= -2\,m\omega\,x\operatorname{sen}\lambda + C_2 \\ m\frac{dz}{dt} &= -mgt - 2\,m\omega\,x\cos\lambda + C_3 \end{aligned}\right.$$

A. OBRECHT.

(Continuará)